Originalprüfung Haupttermin Mathematik Abi BW 2004

Wahlteil
3.Analysis-Aufgabe

3.1

Für jedes $k \succ 0$ ist eine Funktion f_k gegeben durch

$$f_k(x) = \frac{3ke^x}{e^{2x} + k}; \quad x \in \Re.$$

Ihr Schaubild sei C_k.

a) Skizzieren Sie für drei selbst gewählte Werte von k die Schaubilder C_k in ein gemeinsames Koordinatensystem.
Untersuchen Sie das Verhalten von f_k für $x \to \pm\infty$.
Stellen Sie gemeinsame Eigenschaften der skizzierten Schaubilder zusammen. (5VP)

b) Jedes Schaubild C_k hat genau einen Hochpunkt.
Berechnen Sie dessen Koordinaten.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Ortskurve der Hochpunkte aller C_k.
Ergänzen Sie die Skizze aus Teilaufgabe a) um diese Ortskurve. (6VP)

c) Der Term $f_4(x)$ beschreibt für $x \geq 0$ die Zuwachsrate der von einer Bakterienkultur bedeckten Fläche zum Zeitpunkt x (x in min. ab Beobachtungsbeginn, $f_4(x)$ in $cm^2/\text{min.}$).
Um wie viele Quadratzentimeter vergrößert sich die von der Kultur bedeckte Fläche in den ersten 2 Minuten? (3VP)

3.2

Die Ableitung der Funktion h_1 mit $h_1(x) = \frac{1}{x}; \; x \neq 0$ und die Produktregel werden als bekannt vorausgesetzt.
Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ die Funktion h_n mit

$$h_n(x) = \frac{1}{x^n}; \quad x \neq 0$$

die Ableitung

$$h_n'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$$ hat. (4VP)