DAS ABI-PFLICHTTEIL Büchlein

für Baden-Württemberg

Alle Originalaufgaben Haupttermine 2004 – 2011

Ausführlich gerechnete und kommentierte Lösungswege

Mit vielen Zusatzhilfen

$\sqrt{\ }$ X^2 π Σ

Von: Jochen Koppenhöfer und Pascal Christian

Inhaltsverzeichnis

Originalprüfung Haupttermin Mathematik Abi BW 2004 Pflichtteil

Aufgabe 1

Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = \frac{x^2}{x^2+3}$ und vereinfachen Sie $f'(x)$. (2VP)

Aufgabe 2

Geben Sie eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x^2} + \sin(2x)$ an. (2VP)

Aufgabe 3

Lösen Sie die Gleichung $e^{4x} - 11e^{2x} + 18 = 0$. (3VP)

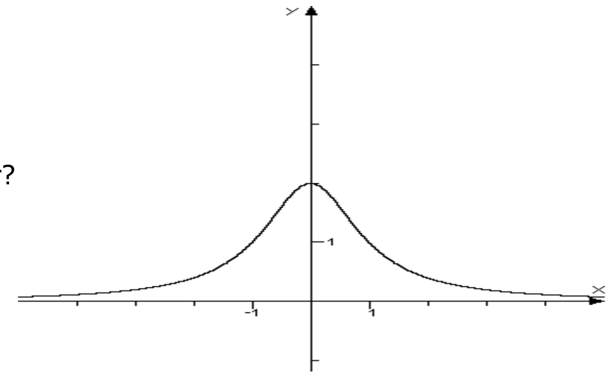
Aufgabe 4

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{x} + 2$; $x \neq 0$.

Das Schaubild von f hat im Punkt P(1/v) die Tangente t.
Ermitteln Sie eine Gleichung von t.
Die Tangente t schneidet die x-Achse im Punkt S.
Bestimmen Sie die Koordinaten von S. (3VP)

Aufgabe 5

Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f.
Welche der folgenden Aussagen über die Funktion f sind wahr, falsch oder unentscheidbar?



Begründen Sie Ihre Antworten.

(1) f ist streng monoton wachsend für $-3 \leq x \leq 3$.

(2) Das Schaubild von f hat mindestens einen Wendepunkt.

(3) Das Schaubild von f ist symmetrisch zur y-Achse.

(4) Es gilt $f(x) > 0$ für alle $x \in \{-3; 3\}$. (6VP)

Aufgabe 6

Gegeben sind die Gerade g und die Ebene E durch

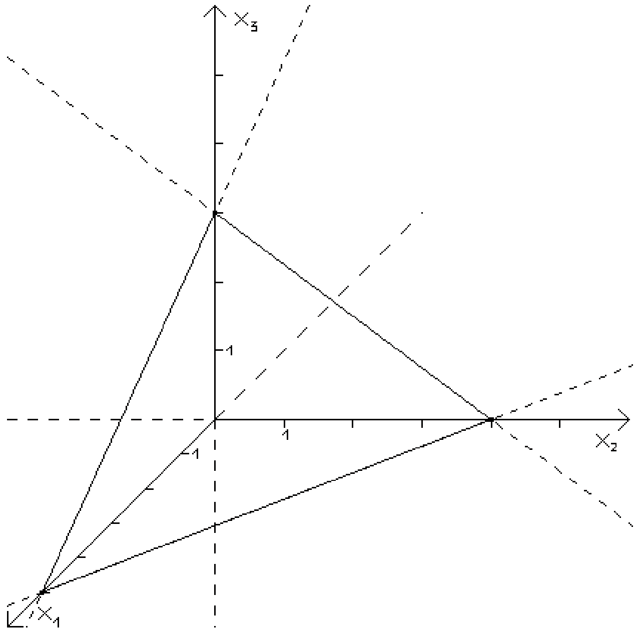
$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \; t \in \Re \quad \text{und} \quad E: 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11$$

Prüfen Sie nach, ob der Punkt A(3/0/2) auf der Geraden g liegt.
Zeigen Sie: Die Gerade g ist orthogonal zur Ebene E.
Bestimmen Sie die Koordinaten desjenigen Punktes der Ebene E, welcher vom Punkt A den kleinsten Abstand hat.

(4VP)

Aufgabe 7

Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der dargestellten Ebene.



(3VP)

Aufgabe 8

Gegeben sind im Raum eine Gerade g und ein Punkt A, der nicht auf g liegt. Beschreiben Sie ein Verfahren zur Bestimmung des Abstandes von A zu g

(3VP)

Originalprüfung Haupttermin Mathematik Abi BW 2004
Lösungen Pflichtteil

Aufgabe 1

$f(x)=\frac{x^2}{x^2+3}$ mit der Quotientenregel $f(x)=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$ $u=x^2$ und $v=x^2+3$

$f'(x)=\frac{2x\cdot(x^2+3)-x^2\cdot 2x}{(x^2+3)^2} \rightarrow f'(x)=\frac{2x^3+6x-2x^3}{(x^2+3)^2} \rightarrow f'(x)=\frac{6x}{(x^2+3)^2}$

Aufgabe 2

$f(x)=\frac{1}{x^2}+\sin(2x)$ zum Besseren Aufleiten zuerst mal Umschreiben: $f(x)=x^{-2}+\sin(2x)$

$F(x)=\frac{x^{-1}}{-1}-\frac{1}{2}\cos(2x) \rightarrow F(x)=-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cos(2x)$

Aufgabe 3

$e^{4x}-11e^{2x}+18=0$ ist nur mit einer Substitution machbar: $e^{2x}=u$

$\rightarrow u^2-11u+18=0$ Dies ist eine allseits beliebte quadrat. Gleichung, die man mit der „Mitternachtsformel" löst. Da dies der Pflichtteil ist, muss man die Formel auswendig können. (zur Erinnerung: $x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$).

Also: $u_{1/2}=\frac{11\pm\sqrt{121-72}}{2} \rightarrow u_{1/2}=\frac{11\pm\sqrt{49}}{2} \rightarrow u_{1/2}=\frac{11\pm 7}{2} \rightarrow u_{1/2}=\frac{9}{2}$

Rücksubstitution: *Gleichung 1*: $e^{2x}=9 \rightarrow \ln e^{2x}=\ln 9 \rightarrow 2x=\ln 9 \rightarrow 2x=\ln 3^2 \rightarrow 2x=2\ln 3$

$\rightarrow x=\ln 3$

Gleichung 2: $e^{2x}=2 \rightarrow \ln e^{2x}=\ln 2 \rightarrow 2x=\ln 2 \rightarrow x=\frac{1}{2}\ln 2$ oder

$x=\ln\sqrt{2}$.

Aufgabe 4

$f(x)=\frac{2}{x}+2$; $x\neq 0$. P(1/4)

Allgemeine Geradengleichung bzw. Tangentengleichung: $t: y=mx+c$.
$m=f'(1)$, c wird durch Einsetzen des Punktes P ermittelt.

$f(x)=2\cdot x^{-1}+2$

$f'(x)=-2\cdot x^{-2} \rightarrow f'(x)=\frac{-2}{x^2}$ Also $f'(1)=-2$

$f'(1)$ und $P(1/4)$ in t:

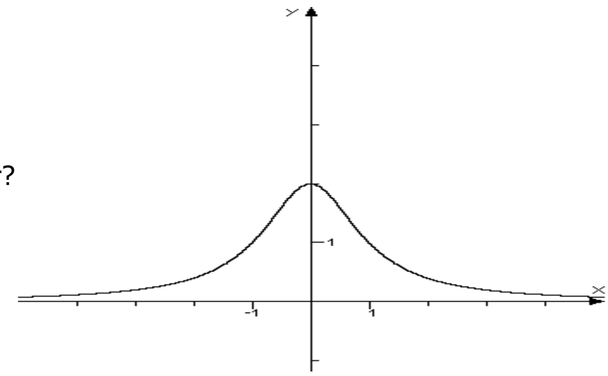
$4=-2\cdot 1+c \rightarrow c=6$ $\Rightarrow t: y=-2x+6$

Schnittpunkt von t mit der x-Achse hat die Bedingung y=0:

$0=-2x+6 \rightarrow x=3$ der Punkt S hat also die **Koordinaten S(3/0).**

Aufgabe 5

Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f. Welche der folgenden Aussagen über die Funktion f sind wahr, falsch oder unentscheidbar?



Begründen Sie Ihre Antworten.

(1) f ist streng monoton wachsend für $-3 \le x \le 3$.

Antwort: Richtig, da $f'(x) \ge 0$ ist. ($f'(x)$ läuft ja komplett oberhalb der x-Achse.)

(2) Das Schaubild von f hat mindestens einen Wendepunkt.
Antwort: Richtig, da ein Extremwert bei $f'(x)$ ein Wendepunkt bei $f(x)$ bedeutet.

(3) Das Schaubild von f ist symmetrisch zur y-Achse.
Antwort: Falsch. Die Funktion ist komplett monoton steigend (siehe (1)).

(4) Es gilt $f(x) > 0$ für alle $x \in \{-3; 3\}$.
Antwort: Unentscheidbar. Das kann so sein, muss aber nicht. Man kann durch $f'(x)$ keine Rückschlüsse auf Funktionswerte von $f(x)$ ziehen. Nicht nur hier, sondern immer.

Aufgabe 6

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \ t \in \Re \quad \text{und} \quad E: \ 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11$$

Punkt A(3/0/2) liegt dann auf der Geraden, wenn er deren Gleichung erfüllt. Also eine Punktprobe. $\vec{x}$ in der Gleichung wird durch den Punkt A ersetzt:

$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \ t \in \Re$ dies liefert 3 Gleichungen für t, die jeweils für das gleiche t erfüllt sein müssen. Im anderen Fall liegt A nicht auf g:

1) $3 = 1 + 2t \to t = 1$
2) $0 = 1 - t \to t = 1$
3) $2 = 2t \to t = 1$ Treffer. Punkt A liegt auf g.

Orthogonalität: Ist eine Gerade orthogonal zu einer Ebene E, dann muss Ihr Richtungsvektor und der Normalenvektor der Ebene E linear abhängig sein. Einfacher gesagt:

Der eine Vektor ist ein Vielfaches vom Anderen: $k \cdot \vec{r} = \vec{n} \to$

$k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ dies ist für k=2 erfüllt, somit auch orthogonal.

Kleinster Abstand:

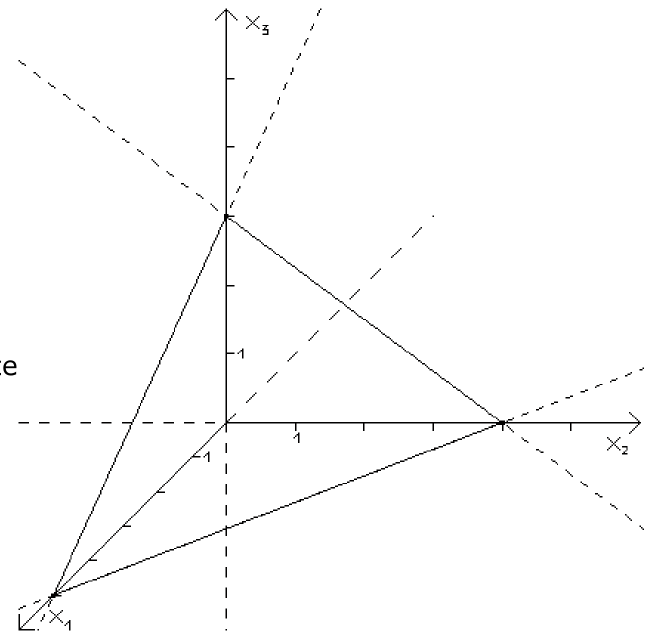
Den kleinsten Abstand zu einem Objekt erhält man immer durch senkrechte Projektion auf dieses.
Also stellt man eine Lotgerade l zu E durch A auf und schneidet diese mit E:

l: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; in E eingesetzt: $4(3+2t) - 2(-t) + 4(2+2t) = 11 \rightarrow$

$12+8t+2t+8+8t=11 \rightarrow 18t=-9 \rightarrow t = -\frac{1}{2}$ wieder in l zurück:

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + (-\frac{1}{2}) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix}$ Punkt P(2/0,5/1) hat also kleinsten Abstand zu E.

Aufgabe 7



Zuerst Ablesen der Spurpunkte:

$S_1(5/0/0)$
$S_2(0/4/0)$
$S_3(0/0/3)$

Am Einfachsten geht es mit der „Achsenabschnittsform", wenn Spurpunkte bekannt sind:

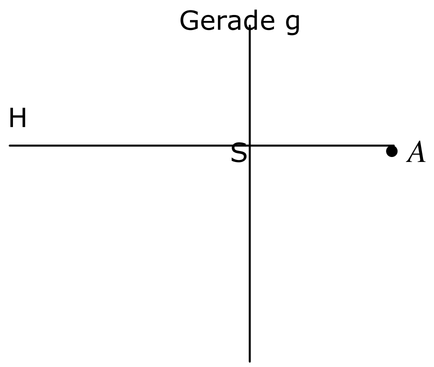
$\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} + \frac{x_3}{c} = 1$

a,b und c stehen für die Zahlen der zugehörgen Spurpunkte. Und rechts des Gleichheitszeichens steht immer eine 1.

Also: $\frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{3} = 1$ fertig. Wen die Brüche stören, kann das Ganze auch mit 60 multiplizieren: $12x_1 + 15x_2 + 20x_3 = 60$.

Aufgabe 8

Skizze:



Beschreibung:

1. Hilfsebene H orthogonal zu g, durch A, aufstellen.
   Dadurch ist $\text{Richtungsvektor}_g = \text{Normalenvektor}_H$.
2. Schnitt von g und H liefert Punkt S.
3. Betrag des Vektors $\left|\overrightarrow{AS}\right| =$ gesuchter Abstand Punkt A zur Geraden g.