Analyt. Geometrie

Inhaltsverzeichnis

1. Darstellungsformen ändern:
   Parameterf. E $\Leftrightarrow$ Koord.gl. E

2. Spurpunkte
3. Lagebeziehungen: a) E-g b) g-g c) E-E

Winkel beurteilt wird es immer mit $\vec{r}$; $\vec{n}$!

4. 3 Schnitte: a) E-g b) g-g c) E-E
5. 3 Abstände: a) E-P (HNF)
   b) P-g (Hilfsebene oder „wandernder Punkt")
   c) g-g (Formel; „wandernder Punkt")
6. Spiegelung (v.a. g $\Leftrightarrow$ E)
7. Teilverhältnis-Aufgaben
8. [Skalarprodukt interpretieren]; d.h. Verständnisf. Abstände.

Zu 1

Bsp.: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Koordgl. immer über $\vec{n}$:

mit Kreuzprodukt / Vektorprodukt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot(-3) - 3\cdot 1 \\ 3\cdot 2 - 0\cdot(-3) \\ 0\cdot 1 - (-1)\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow E: 3x_2 + x_3 = a$; mit Stützv. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$3\cdot 2 + 5 = a = 11$

$\Rightarrow 3x_2 + x_3 = 11$

LGS-Verfahren f. $\vec{n}$:

$\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$; $\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow -n_2 + 3n_3 = 0$ $\qquad$ $2n_1 + n_2 - 3n_3 = 0$

$n_2 = 3n_3$

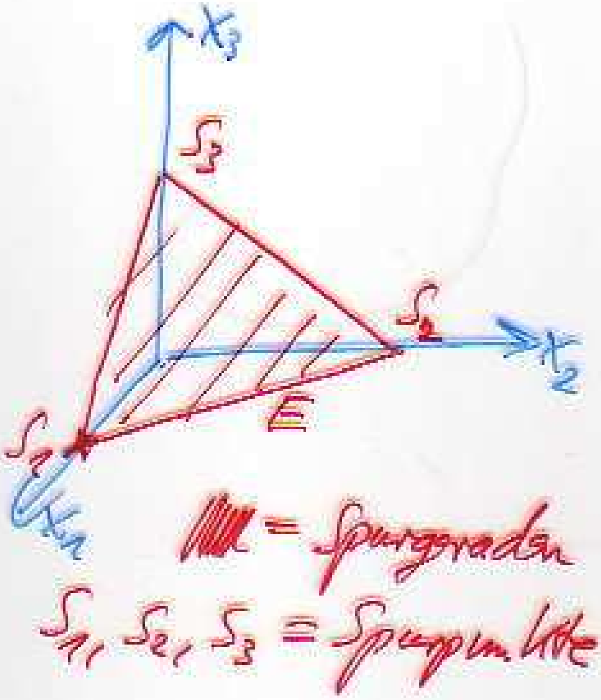
$\boxed{n_3 = 1} \Rightarrow \boxed{n_2 = 3}$ $\qquad$ $2n_1 + \cancel{3} - \cancel{3} = 0$

$\boxed{n_1 = 0}$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

---

② Spurpunkte: $E: x_1 - 2x_2 + x_3 = 5$



Zuhaltemethode:

$S_1(5/0/0)$

$S_2\left(0/-\frac{5}{2}/0\right)$

$S_3(0/0/5)$

③ Lagebeziehungen

a) $E \parallel g: \vec{r} \cdot \vec{n} = 0$; $E \perp g: \vec{r} = k \cdot \vec{n}$

b) $g_1 \parallel g_2: \vec{r_1} = k \cdot \vec{r_2}$; $g_1 \perp g_2: \vec{r_1} \cdot \vec{r_2} = 0$

c) $E_1 \parallel E_2: \vec{n_1} = k \cdot \vec{n_2}$; $E_1 \perp E_2: \vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0$

Winkel: $E_1 - E_2$: $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|}$

$g_1 - g_2$: $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{r_1} \cdot \vec{r_2}|}{|\vec{r_1}| \cdot |\vec{r_2}|}$

$g - E$: $\sin\alpha = \dfrac{|\vec{r} \cdot \vec{n}|}{|\vec{r}| \cdot |\vec{n}|}$

Länge eines Vektors: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$|\vec{v}| = \sqrt{16+16+4} = \sqrt{36} = \underline{\underline{6}} \text{ L.E.}$$

---

4. Normalenform einer Ebene:

① Param.form ② Normalenform $\xrightarrow{\text{ausmultipliziert}}$ ③ Koord.gl.

allg. Normalenform: $E: \underbrace{(\vec{x} - \vec{p})}_{\vec{v} \text{ i. d. Ebene}} \cdot \vec{n} = 0$

$\Rightarrow E: \vec{x} \cdot \vec{n} - \vec{p} \cdot \vec{n} = 0$

$\Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{n} = \vec{p} \cdot \vec{n}$ ⟵ Koord.gl. v. E

bel. Koord.gl.: $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6$

vektoriell $\vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 6$

④ Schnitte: a) E–g:

$$E: 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 16$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to x_1 \\ \to x_2 \\ \to x_3 \end{matrix}$$

g in E: $2 \cdot (4+t) + 4 \cdot (6+2t) + 6 \cdot (2+3t) = 16$

$$\Rightarrow 8 + 2t + 24 + 8t + 12 + 18t = 16$$

$$\boxed{t = -1}$$

$$S(3/4/-1)$$

$E: x_1 + x_2 - x_3 = 1$ mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$8 = 1$ falsch $\Rightarrow E \parallel g$!

b) g–g: $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad t \in \mathbb{R}$

$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad s \in \mathbb{R}$

$g_1 = g_2$: $\quad 7 + t = -3 + s$ ← überbest. LGS

$$7 - 2t = 0 \to t = \frac{7}{2}$$

$$4 + 6t = 5 - 3s$$

t in I: $7 + \frac{7}{2} = -3 + s$

$13{,}5 = s$ in (III) $\Rightarrow$

$$\underbrace{4+6\cdot\frac{7}{2}}_{+} = \underbrace{5-3\cdot 13{,}5}_{-} \quad \text{falsch}$$

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}$$

$$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-6\\3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-4\\-2\\-6\end{pmatrix}$$

---

c) E_1-E_2:

$$\begin{aligned} E_1 &: x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ E_2 &: 6x_1 + x_2 - x_3 = -7 \end{aligned} \quad +$$

$$7x_1 \qquad + x_3 = 0$$

1 Unbek. eliminieren

$$x_3 = -7x_1 \quad ; \boxed{x_1 = t}$$

$$\boxed{x_3 = -7t} \quad \text{in } E_1:$$

$$t - x_2 - 14t = 7$$

$$\boxed{-7 - 13t = x_2}$$

$$s: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-7\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\-13\\-7\end{pmatrix}$$

c) $E_1 - E_2$: jetzt Paraform E_1 in Koord.form E_2:

E_1: $A(7|0|0)$; $B(0|-7|0)$; $C(0|1|4)$

$$\Rightarrow E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}}_{A-B} + s\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}}_{B-C}$$

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>E_1 in E_2:</u> $6\cdot(7+t) + t + 2s - (s) = -7$

$$\Rightarrow 42 + 6t + t + 2s - s = -7$$

$$7t + s = -49$$

$$\boxed{s = -49 - 7t}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - (49 + 7t)\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 98 \\ 49 \end{pmatrix} - t\begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -98 \\ -49 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -13 \\ -7 \end{pmatrix}$$

5 **Abstände:** a) E–P: HNF

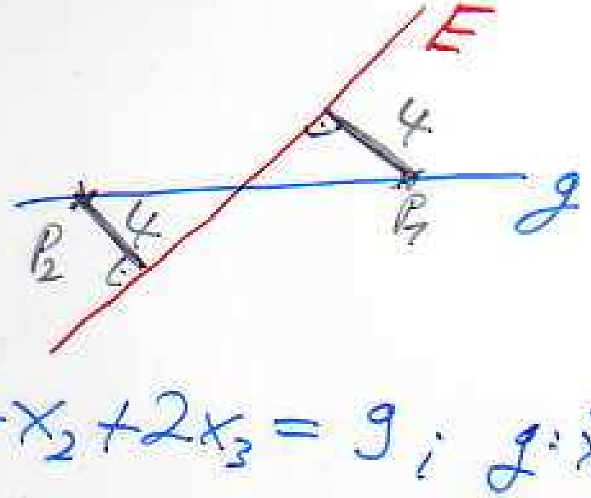
$$E: 2x_1 - 10x_2 + 11x_3 = 0 \qquad A(1/1/-2)$$

HNF$_E$: $$\frac{2x_1 - 10x_2 + 11x_3}{\sqrt{4+100+121}} = 0 \qquad \text{mit } A$$

$$\left| \frac{2 \cdot 1 - 10 \cdot 1 + 11 \cdot (-2)}{\sqrt{225}} \right| = d$$

$$\left| \frac{-30}{15} \right| = d = \underline{\underline{2}} \text{ L.E.}$$

Variante:



$$E: 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 9; \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$G(1/1-3s/2s)$$

grade $\hat{=}$ Punkt mit Parameter!

HNF_E: $$\frac{2x_1 - x_2 + 2x_3 - 9}{\sqrt{9}} = 0$$

$$\frac{2x_1 - x_2 + 2x_3 - 9}{3} = 0 \quad \text{mit } G$$

$$\left| \frac{2 \cdot 1 - (1 - 3s) + 2 \cdot 2s - 9}{3} \right| = 4$$

$$\Rightarrow \left| \frac{2 - 1 + 3s + 4s - 9}{3} \right| = 4$$

$$\Rightarrow \left| \frac{7s - 8}{3} \right| = 4$$

① $\frac{7s-8}{3} = 4$

$7s - 8 = 12$

$7s = 20$

$\boxed{s_1 = \frac{20}{7}}$

$\downarrow$

G_1

② $\frac{7s-8}{3} = -4$

$7s - 8 = -12$

$7s = -4$

$\boxed{s_2 = -\frac{4}{7}}$

$\downarrow$

G_2

$$G_1\left(1 \,\middle|\, 1-3\cdot\frac{20}{7} \,\middle|\, \frac{40}{7}\right) \Rightarrow G_1\left(1 \,\middle|\, -\frac{53}{7} \,\middle|\, \frac{40}{7}\right)$$

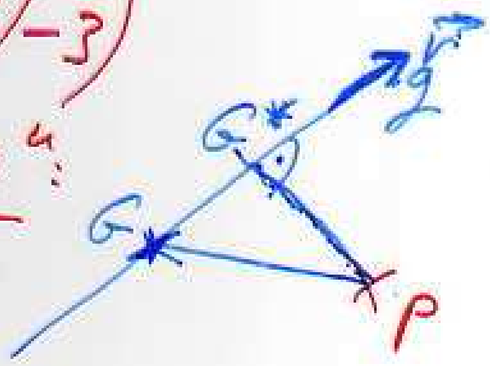
$$G_2\left(1 \,\middle|\, 1+\frac{12}{7} \,\middle|\, -\frac{8}{7}\right) \Rightarrow G_2\left(1 \,\middle|\, \frac{19}{7} \,\middle|\, -\frac{8}{7}\right)$$

---

b) **P–g:** $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

$P(6 \,|\, 7 \,|\, -3)$

„Wandernder Punkt":



$$G(2+3t \,|\, 1 \,|\, 4-2t)$$

$$\overrightarrow{PG} = \begin{pmatrix} -4+3t \\ -6 \\ 7-2t \end{pmatrix}; \quad \boxed{\text{Bed: } \begin{pmatrix} -4+3t \\ -6 \\ 7-2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 0}$$

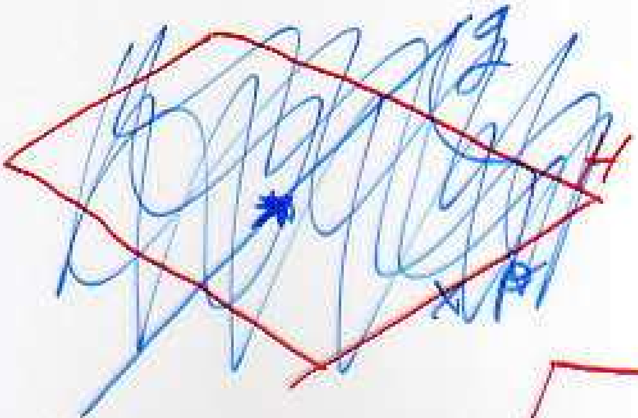
RiV. v. g!

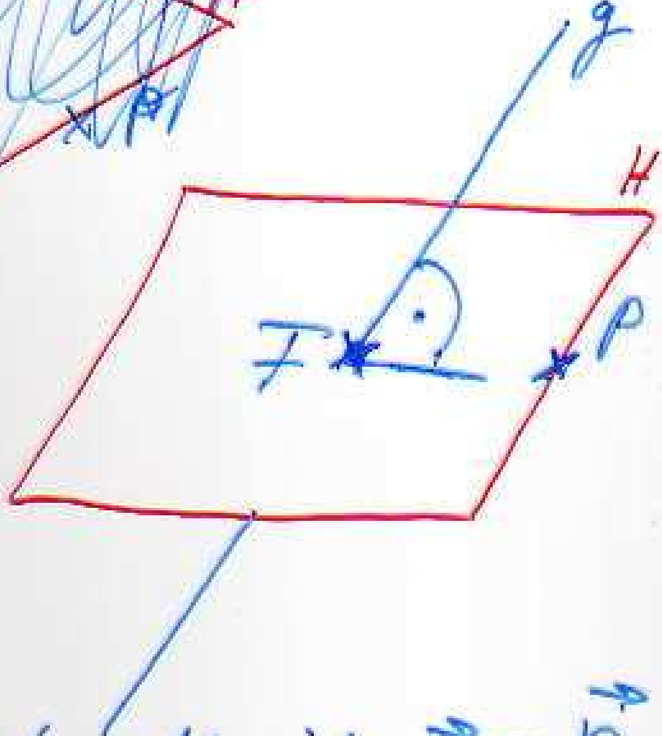
$$\Rightarrow -12+9t-14+4t=0$$

$$-26+13t=0 \Rightarrow \boxed{t=2} \rightarrow G^*$$

$$\overrightarrow{PG} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\overrightarrow{PG}\right| = \sqrt{4+36+9} = \sqrt{49} = \underline{\underline{7\,\text{L.E.}}}$$

2. Methode: Hilfsebene





Verfahren: Hilfsebene H mit $\vec{n}_H = \vec{r}_g$ und P

$\Rightarrow H \cap g \Rightarrow F$; Lsg.: $|\overrightarrow{FP}|$

H: $3x_1 - 2x_3 = a$ mit $P(6/2/-3)$

$3 \cdot 6 - 2 \cdot (-3) = a = 24$

H: $3x_1 - 2x_3 = 24$

$H \cap g: 3 \cdot (2+3t) - 2 \cdot (4-2t) = 24$

$\Rightarrow 6 + 9t - 8 + 4t = 24$

$13t = 26 \Rightarrow \boxed{t=2} \Rightarrow F(8/1/0)$

$\vec{PF} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{PF}| = \sqrt{4+36+9}$

$= \sqrt{49} = \underline{\underline{7\ L.E.}}$

c) $\underline{g_1 - g_2}$: $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$

$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\underline{\text{Formel:}}$ $d = \left| (\vec{p} - \vec{q}) \cdot \vec{n_0} \right|$

p, q = Stützvektoren ; $\vec{n} = \vec{v_1} \times \vec{v_2}$

$\vec{n_0} = \frac{1}{|\vec{v_1} \times \vec{v_2}|} \cdot (\vec{v_1} \times \vec{v_2})$

$\underline{\vec{n}}$: $\begin{pmatrix} \cancel{1} \\ -2 \\ 6 \\ 1 \\ -2 \\ \cancel{6} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cancel{1} \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ \cancel{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-0 \\ 6+3 \\ 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$

$|\vec{n_0}| \Rightarrow \sqrt{36+81+4} = \sqrt{121} = 11\ L.E.$

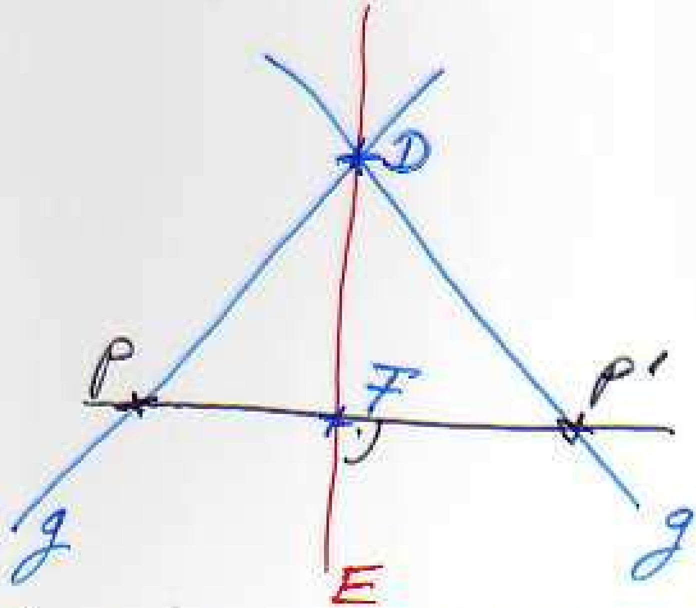
$\vec{n_0} = \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$d = \left| \left[\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right] \cdot \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} \right|$$

$$d = \left| \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{1}{11} \cdot (60 + 63 - 2) \right|$$

$$= \frac{121}{11} = \underline{\underline{11}} \text{ L.E.}$$

<u>Spiegelung:</u> <u>g – E</u>



<u>Verfahren:</u> Lotgrade $l: \vec{x} = \vec{p} + l \cdot \vec{n}_E$

$\Rightarrow l \cap E \Rightarrow F$

$\vec{OP'} = \vec{OP} + 2 \cdot \vec{PF}$

oder $\vec{OP'} = \vec{OF} + \vec{PF}$

Bsp: $E: 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cap E \Rightarrow F$$

l in E: $2 \cdot (1+2l) - (-l) + 3 \cdot (4+3l) = 6$

$$\Rightarrow 2 + 4l + l + 12 + 9l = 6$$

$$14l + 14 = 6$$

$$14l = -8$$

$$\boxed{l = -\frac{4}{7}} \text{ in } l:$$

$$F\left(-\frac{1}{7} \middle| \frac{4}{7} \middle| \frac{16}{7}\right)$$

$$\vec{PF} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{7} \\ \frac{4}{7} \\ -\frac{12}{7} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{OP'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{8}{7} \\ \frac{4}{7} \\ -\frac{12}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{7} \\ \frac{8}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

$$P'\left(-\frac{9}{7} \middle| \frac{8}{7} \middle| \frac{4}{7}\right)$$