$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Beherrsche Analysis

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Wir zeigen euch,
was wirklich hinter den Funktionen steckt.

$$\begin{tikzcd}
\sin \arrow[d, "(\ )'"'] & -\cos \arrow[l, "(\ )'"'] \\
\cos \arrow[r, "(\ )'"'] & -\sin \arrow[u, "(\ )'"']
\end{tikzcd}$$

Ein Buch für alle, die kurz vor dem Abi stehen,
aber auch für alle anderen in der Oberstufe.

geschrieben von Fabian Rühle und Robert Seifert

II Analysis

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieses Skript soll euch helfen, die Konzepte und Verfahren der Analysis besser verstehen zu können. Wir werden euch Mittel und Wege zeigen, wie man spezifische Aufgabenstellungen lösen kann. Diese Aufgabenstellungen bilden dann später die Grundlage für komplexe Abi-Aufgaben. Deshalb legen wir euch nahe, die Kapitel Stück für Stück durchzuarbeiten und euch mit den Grundlagen vertraut zu machen. Rechnet am besten jedes Beispiel, das wir euch zeigen, einmal selber durch. Natürlich kann man die Problemstellungen auch anders lösen, aber wir glauben, dass es mit den hier vorgestellten Verfahren am einfachsten und schnellsten geht.

Die Ausrede: „Ich kapier die Aufgabe nicht!“ lassen wir nicht mehr gelten. Unsere Verfahren sin so ausgelegt, dass man sie auswendig lernen kann. Es ist also nicht mehr eine Frage des Verständnisses, sondern eine Frage des Fleißes. Wenn ihr mit diesem Skript intensiv arbeitet, werdet ihr merken, dass sich alles, was ihr in der Analyis kennenlernen werdet, auf ein paar Grundlagen reduzieren lässt.

Unser Appell an euch ist: Arbeitet hart und fleißig. Und wer weiß, vielleicht wird die/der eine oder andere unter euch ihren/seinen Gefallen an der Mathematik finden. Wir wünschen euch auf jeden Fall viel Erfolg und Spaß mit diesem Buch.

II.1.29 Differenzieren bzw. Ableiten

Ihr könnt jetzt von Schaubildern Schnittpunkte berechnen, Schaubilder verschieben, Funktionen verketten und Grenzwerte bestimmen. Eine weitere wichtige Eigenschaft von Funktionen ist die Steigung eines Schaubildes in einem Punkt $P\left(x_0 \middle| f(x_0)\right)$. Die Steigung eines Schaubildes ist definiert, als die Steigung der Tangente in diesem Punkt. Die Frage ist nur, wie man die Steigung einer Tangente im Punkt P berechnen soll.

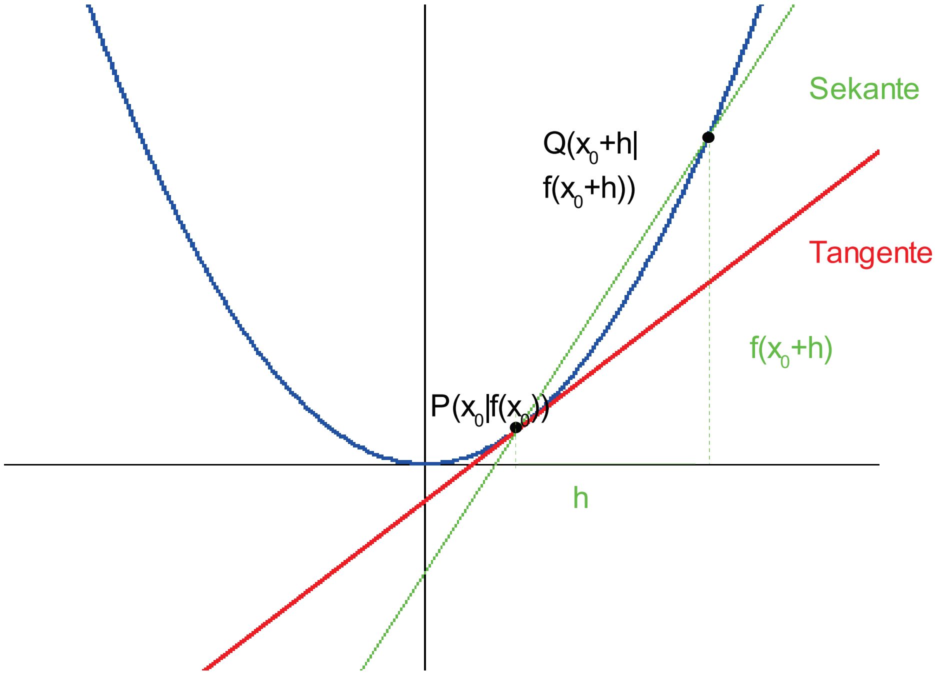

Abbildung 34: Tangente und Sekante im Punkt P

In Abbildung 34 ist dargestellt, wie man bei der Tangentenberechnung, bzw. bei der Berechnung ihrer Steigung vorgeht. Man nimmt sich einen Punkt auf dem Schaubild, in dem man die Tangente bilden möchte (bei uns P) und läuft dann h Schritte nach rechts zu Q. Dann berechnet man die Steigung der Sekante durch P und Q.

Ihr wisst ja noch, dass man, um die Steigung einer Geraden durch zwei Punkte P und Q zu berechnen, das Steigungsdreieck braucht (vgl. Abbildung 35). Es gilt: $m=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$.

Somit gilt für unsere Sekante durch die Punkte $P\left(x_0 \middle| f(x_0)\right)$ und $Q\left(x_0+h \middle| f(x_0+h)\right)$:

$$\boxed{m_S=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

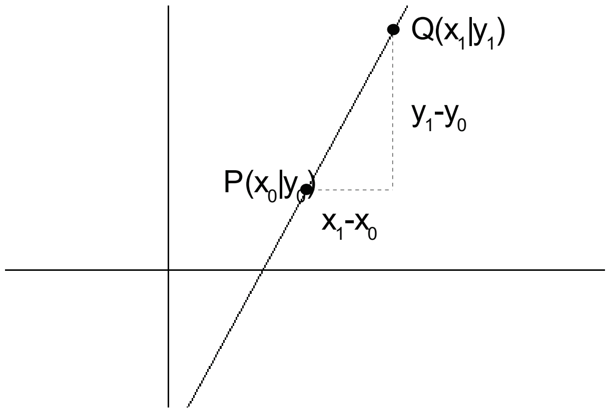

Abbildung 35: Punkt- Steigungsformel

Wie kommt man aber nun von der Steigung der Sekante zur Steigung der Tangente?

Man muss doch nur Q so verschieben, dass er zu P wandert. Also muss der Abstand h von P und Q Null werden. Das Problem bei der Sache ist nur, dass wir dann durch Null teilen würden. Das ist ja verboten. Und wie immer, wenn man was machen möchte, was verboten ist, nimmt man den Limes. Damit ergibt sich für die Steigung der Tangente im Punkt $P\left(x_0 \middle| f(x_0)\right)$: $\boxed{m_T = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)}$

Beispiele:

- $f(x)=x^2$

  $m_T = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{x_0^2+2\cdot h\cdot x_0+h^2-x_0^2}{h}\right)$

  $m_T = \lim_{h\to 0}\left(\frac{2\cdot h\cdot x_0+h^2}{h}\right) = m_T = \lim_{h\to 0}\left(2\cdot x_0+h\right) = 2\cdot x_0+0 = 2\cdot x_0$

  Man sieht also, bevor man den Grenzwert berechnet, muss erst das h im Nenner verschwinden.

- $f(x)=2\cdot x+1$

  $m_T = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{2\cdot(x_0+h)+1-(2\cdot x_0+1)}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{2\cdot h}{h}\right) = \lim_{h\to 0}(2) = 2$

Ableitung:

Unter der Ableitung einer Funktion, versteht man die Funktion, die für einen x-Wert, den Wert der Steigung der Funktion angibt. Man bezeichnet diese Funktion mit f'.

Es gilt: $m_T = f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)$.

$\boxed{f'(x_0) = \text{ Steigung der Tangenten im Punkt } P\left(x_0 \middle| f(x_0)\right)}$

Da man die Ableitung nicht immer so umständlich berechnen möchte, haben sich ein paar schlaue Mathematiker einige Regeln einfallen lassen:

Ableitungsregeln:

$f(x)=c \quad , \quad c\in\mathbb{R}$	$\Rightarrow$	$f'(x)=0$	
$f(x)=c\cdot g(x) \quad , \quad c\in\mathbb{R}$	$\Rightarrow$	$f'(x)=c\cdot g'(x)$	
$f(x)=x^n$	$\Rightarrow$	$f'(x)=n\cdot x^{n-1}$	
$f(x)=g(x)+h(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x)=g'(x)+h'(x)$	
$f(x)=g(x)\cdot h(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x)=g'(x)\cdot h(x)+g(x)\cdot h'(x)$	(Produktregel)
$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$	$\Rightarrow$	$f'(x)=\frac{g'(x)\cdot h(x)-g(x)\cdot h'(x)}{h^2(x)}$	(Quotientenregel)
$f(x)=g(h(x))$	$\Rightarrow$	$f'(x)=h'(x)\cdot g'(h(x))$	(Kettenregel)

Ihr müsst diese Regeln in und auswendig können, denn das Ableiten werdet ihr auf dem Weg zum Abitur ständig brauchen. Deswegen werden wir euch jetzt mit den Ableitungsregeln so lange nerven, bis sie euch zu den Ohren herauskommen.

Hinweis:

Bestimme immer vor dem Ableiten die Art des Terms. Wenn ihr z. B. eine Summe habt, nehmt ihr die Summenregel, wenn ihr ein Produkt habt, nehmt ihr die Produktregel. Achtet aber bei der Produktregel darauf, ob ihr ein Produkt mit einer Konstanten habt, denn dann bleibt die Konstante einfach stehen und ihr leitet den Rest der Funktion getrennt ab.

Tipp: Summe = gut   Produkt = böse

Die Potenzregel:

$$\boxed{f(x)=x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x)=n\cdot x^{n-1}}$$

Hierbei ist zu beachten, dass ihr immer nur eine Variable als Basis haben dürft. Die Potenzregel funktioniert nicht, wenn ihr ganze Terme potenziert. Hierfür nehmt ihr einfach die Kettenregel.

Beispiele:

- $f(x)=x^2$
  Das n ist in diesem Fall 2, wir erhalten: $f'(x)=2\cdot x^{2-1}=2\cdot x$
- $f(x)=3\cdot x^5$
  Hier haben wir zunächst ein Produkt stehen, man benötigt eigentlich die Produktregel. Da 3 aber eine Konstante ist, können wir sie separat ableiten.
  $$f'(x)=3\cdot\left(x^5\right)'=3\cdot\left(5\cdot x^{5-1}\right)=3\cdot 5\cdot x^4=15\cdot x^4$$
- $f(x)=(2\cdot x)^4$
  Hier darf die Potenzregel zunächst nicht benutzt werden, da ein Term potenziert wird. Wir müssen also zuerst umformen. $f(x)=(2\cdot x)^4=2^4\cdot x^4=16\cdot x^4 \quad \Rightarrow \quad f'(x)=16\cdot 4\cdot x^{4-1}=64\cdot x^3$
- $f(x)=\sqrt{x}$
  Auch hier dürfen wir die Potenzregel benutzen, da sich die Wurzel wie folgt schreiben lässt: $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$. Damit können wir ableiten: $f'(x)=\frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$
- $f(x)=\frac{1}{x}$
  Hier ist zunächst auch nicht klar, dass die Potenzregel benutzt werden kann. Aber es gilt: $\frac{1}{x}=x^{-1}$.
  Damit lässt sich die Ableitung berechnen: $f'(x)=-1\cdot x^{-1-1}=-1\cdot x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$
- $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$
  $\frac{1}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}}$, Mithilfe dieser Umformung kann man die Ableitung berechnen:
  $$f'(x)=-\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}-1}=-\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}^{\,3}}$$

Die Summenregel:

$\boxed{f(x)=g(x)+h(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=g'(x)+h'(x)}$

Habt ihr eine Summe von zwei Funktionen, dürft ihr sie getrennt voneinander ableiten. Versucht jeden Term, den ihr ableiten wollt auf eine Summe zu bringen, das geht am einfachsten.

Beispiele:

- $f(x)=x^2+2\cdot x+1$
  Nach der Summenregel darf hier jeder Term getrennt abgeleitet werden, also:

  $f'(x)=2\cdot x^{2-1}+2\cdot 1\cdot x^{1-1}+0=2\cdot x+2\cdot x^0=2\cdot x+2$

- $f(x)=x^3-(x^2+1)$
  Auch hier dürfen wir die Terme x^3 und x^2-1 getrennt voneinander ableiten, beachtet aber das Minus: $f'(x)=3\cdot x^2-(2\cdot x+0)=3\cdot x^2-2\cdot x$

- $f(x)=x\cdot(x^2+x)$
  Dieser Term ist zunächst ein Produkt, man müsste also zunächst die Produktregel anwenden, doch durch das Distributivgesetz erhalten wir eine Summe: $f(x)=x^3+x^2$. Damit können wir wieder die Summenregel benutzen: $f'(x)=3\cdot x^2+2\cdot x$

- $f_t(x)=t\cdot(x+1)$

  Auch hier haben wir zunächst ein Produkt, hier kann man auch wieder ausmultiplizieren und man erhält die Summe: $f_t(x)=t\cdot x+t$. Hier kann man wieder die Summenregel benutzen und man erhält: $f_t'(x)=t\cdot 1+0=t$

  > **Beachte:**
  >
  > t ist hier nicht die Funktionsvariable sondern ein Parameter, der nicht abgeleitet wird, sondern eine Zahl (konstanten Faktor) repräsentiert.

  Da t ja nur ein Prameter ist, also damit konstant für jede Funktion f_t, ist es ein konstanter Faktor, und man kann auch eine andere Ableitungsregel benutzen:

  $f_t'(x)=t\cdot(1+0)=t\cdot 1=t$

- $f(x)=\dfrac{x^3+4\cdot x^2}{2\cdot x}$

  Auch hier ist zunächst nicht die Summenregel benutzbar, da wir hier einen Bruch haben und die Quotientenregel benutzen müssen. Da ihr aber mittlerweile Experten im Bruchrechnen seid, wisst ihr bestimmt, dass man diesen Bruch auch als Summe schreiben kann:

  $f(x)=\dfrac{x^3}{2\cdot x}+\dfrac{4\cdot x^2}{2\cdot x}=\dfrac{1}{2}\cdot x^2+2\cdot x$. Damit kann man wieder die Summenregel benutzen und es gilt:
  $f'(x)=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot x+2\cdot 1=x+2$

Man kann leider nicht jedes Produkt so umformen, dass die Summenregel sinnvoll anzuwenden ist. Nehmen wir z. B. den Term $(x+1)^{100}$. Wenn man diesen Term in eine Summe umwandelt, ist man nach 3 Stunden immer noch nicht fertig mit ableiten. Daher gibt es noch die anderen Regeln zum Ableiten. Diese werden aber erst bei der Verknüpfung mit etwas komplexeren Funktionen sinnvoll, daher machen wir zunächst die Ableitungen von Grundfunktionen, die euch im Abitur noch so begegnen werden.

Besondere Ableitungen:

$$f(x)=e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x)=e^x$$

$$f(x)=\ln(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{1}{x}$$

$$f(x)=\sin(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\cos(x)$$

$$f(x)=\cos(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=-\sin(x)$$

$$f(x)=\tan(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{1}{\cos^2(x)} \quad , \quad f'(x)=1+\tan^2(x)$$

Keine Sorge, die Dinger sehen komplizierter aus, als sie in Wirklichkeit sind. Auch hier gilt: Übung macht den Meister.

Die Produktregel:

$$\boxed{f(x)=g(x)\cdot h(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=g'(x)\cdot h(x)+g(x)\cdot h'(x)}$$

Die Produktregel benötigt man, wenn man einen Term nicht weiter in eine Summe zerteilen kann, oder es eine zu große Summe werden würde. Passt hierbei auf, denn nicht immer ist die Produktregel sinnvoll.

Bei der Produktregel ist es zunächst einmal wichtig, die beiden Faktoren des Produktes herauszulesen. Hat man dies geschafft, so leitet man die Faktoren getrennt voneinander ab und setzt dann nur noch in die Gleichung von oben ein.

Beispiele:

- $f(x)=x\cdot(2\cdot x+1)$
  Ihr seht hier natürlich sofort, dass man eigentlich die Summenregel benutzen sollte, aber wir werden es trotzdem mal mit der Produktregel versuchen. Zunächst müssen wir die einzelnen Faktoren finden, das sind in diesem Fall: $g(x)=x$, $h(x)=2\cdot x+1$.

  Nun müssen wir noch die Ableitungen bilden: $g'(x)=1$, $h'(x)=2$. Dann nur noch in die Formel von oben einsetzen: $f'(x)=\underbrace{1}_{g'(x)}\cdot\underbrace{(2\cdot x+1)}_{h(x)}+\underbrace{x}_{g(x)}\cdot\underbrace{2}_{h'(x)}=2\cdot x+1+2\cdot x=4\cdot x+1$. Ihr könnt es ja nochmals mit der Summenregel überprüfen.

- $f(x)=x^2\cdot e^x$
  Hier haben wir jetzt einen Term, den wir nicht weiter zu einer Summe umformen können. Wir müssen also wieder die Faktoren und deren Ableitungen bestimmen: $g(x)=x^2$, $g'(x)=2\cdot x$, $h(x)=e^x$, $h'(x)=e^x$.
  Dann einsetzen: $f'(x)=2\cdot x\cdot e^x+x^2\cdot e^x=e^x\cdot(x^2+2\cdot x)$. Bei der e-Funktion solltet ihr euch immer angewöhnen, sie auszuklammern. Das werden wir aber noch ausführlich bei der Besprechung der e-Funktion behandeln.

- $f(x)=\sin(x)\cdot\cos(x)$
  Auch hier wieder die Faktoren bestimmen:

  $g(x)=\sin(x)$, $g'(x)=\cos(x)$, $h(x)=\cos(x)$, $h'(x)=-\sin(x)$
  Dann einsetzen: $f'(x)=\cos(x)\cdot\cos(x)+\sin(x)\cdot(-\sin(x))=\cos^2(x)-\sin^2(x)$

- $f(x)=2\cdot x\cdot e^x\cdot\ln(x)$
  Hier ist wohl der komplizierteste Fall der Produktregel eingetreten. Wir haben ein Produkt von vier Faktoren, die Formel ist aber nur für 2 ausgelegt. Wir müssen also kompliziertere Faktoren wählen. Wie ihr diese Faktoren wählt, bleibt euch überlassen, wir nehmen mal: $g(x)=2\cdot x$ und $h(x)=e^x\cdot\ln(x)$. Die Ableitung von g ist einfach, bei der Ableitung von h benötigen wir aber nochmals die Produktregel. Es gilt:

  $$g'(x)=2,\; h'(x)=e^x\cdot\frac{1}{x}+e^x\cdot\ln(x)=e^x\cdot\left(\frac{1}{x}+\ln(x)\right)$$

  Das Ganze eingesetzt: $f'(x)=2\cdot e^x\cdot\ln(x)+2\cdot x\,e^x\cdot\left(\frac{1}{x}+\ln(x)\right)=2\cdot e^x\cdot(\ln(x)+1+x\cdot\ln(x))$

Ihr seht also, sowohl bei der Produktregel, als auch bei der Quotienten- und Kettenregel können Ableitungen auftreten, die wesentlich länger sind, als die Ausgangsfunktion.

Die Quotientenregel:

$$\boxed{f(x)=\frac{g(x)}{h(x)} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{g'(x)\cdot h(x)-g(x)\cdot h'(x)}{h^2(x)}}$$

Auch hier müssen die einzelnen Funktionen und ihre Ableitungen erst bestimmt werden, danach einfach wieder nur einsetzen.

Beispiele:

- $f(x)=\frac{3\cdot x}{x^2+1}$

  Die Funktionen und deren Ableitungen lauten:

  $g(x)=3\cdot x$, $g'(x)=3$, $h(x)=x^2+1$, $h'(x)=2\cdot x$

  Dann wieder eingesetzt: $f'(x)=\frac{3\cdot(x^2+1)-3\cdot x\cdot 2\cdot x}{(x^2+1)^2}=\frac{3\cdot x^2+3-6\cdot x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{-3\cdot x^2+3}{(x^2+1)^2}$.

  Gewöhnt euch an, den Nenner niemals auszumultiplizieren. Ihr wisst ja, in einem Bruch kann man nur kürzen, wenn man Produkte hat. Durch das Ausmultiplizieren entsteht aber im Nenner eine Summe und damit wird das Kürzen unmöglich.

- $f(x)=\frac{1+x}{2\cdot e^x+x}$

  Auch hier ist es nicht möglich den Bruch geschickt in eine Summe zu verwandeln. Man könnte zwar schreiben: $f(x)=\frac{1}{2\cdot e^x+x}+\frac{x}{2\cdot e^x+x}$, aber hier müsste man zweimal die Quotientenregel anwenden, es bringt also keinen Vorteil, diesen Bruch umzuformen. Nun müssen wir wieder die Funktionen bestimmen: $g(x)=1+x$, $g'(x)=1$ und $h(x)=2\cdot e^x+x$, $h'(x)=2\cdot e^x+1$. Danach wieder einsetzen:

  $$f'(x)=\frac{1\cdot\left(2\cdot e^x+x\right)-(1+x)\cdot\left(2\cdot e^x+1\right)}{\left(2\cdot e^x+x\right)^2}=\frac{2\cdot e^x+x-2\cdot e^x-1+2\cdot x\cdot e^x-x}{(2\cdot e^x+x)^2}=\frac{2\cdot x\cdot e^x-1}{(2\cdot e^x+x)^2}$$

- $f_t(x)=\frac{t\cdot x^2+2}{t+1}$

  Hier ist die Quotientenregel nicht von Nöten, da unser Nenner kein x enthält. $t+1$ ist hier ein konstanter Faktor und damit ist die Quotientenregel viel zu kompliziert. Man kann sie zwar benutzen, aber wer das macht ist selber schuld. Wir können also die Funktion umformen: $f_t(x)=\frac{1}{t+1}\cdot\left(t\cdot x^2+2\right)$. Damit einfach die Ableitung bilden: $f_t'(x)=\frac{1}{t+1}\cdot(t\cdot 2\cdot x+0)=\frac{t\cdot 2\cdot x}{t+1}$

Hinweis:

Die Quotientenregel solltet ihr niemals verwenden, wenn im Zähler oder im Nenner kein x steht. Wenn im Nenner kein x steht ist es einfach eine Multiplikation mit einer Konstanten, wenn im Zähler kein x steht, benötigt ihr die Kettenregel.

Die Kettenregel:

$\boxed{f(x)=g(h(x)) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=g'(h(x))\cdot h'(x)}$

Diese Regel benötigt ihr immer, wenn ihr zwei Funktionen miteinander verkettet. Die Addition und die Multiplikation ist im Allgemeinen jedoch keine Verkettung. Um diese Regel anzuwenden, müsst ihr immer die äußere und die innere Funktion finden, diese ableiten und dann wieder nur einsetzen.

Beispiele:

- $f(x)=(2\cdot x+3)^5$
  Hier ist eine Verkettung am werkeln. Hier muss die innere Funktion bestimmt werden. $h(x)=2\cdot x+3$, $h'(x)=2$. Damit können wir f schreiben als: $f(x)=(h(x))^5$. In die Formel eingesetzt: $f'(x)=5\cdot(h(x))^4\cdot h'(x)=5\cdot(2\cdot x+3)^4\cdot 2=10\cdot(2\cdot x+3)^4$.

  Viele haben Probleme mit der Funktionsschreibweise. Deshalb tut einfach so als würde dastehen: $\boxed{f'(x)=(\Delta^5)'\cdot\Delta'=5\cdot\Delta^4\cdot\Delta' \quad \overset{\Delta=2\cdot x+3}{\Rightarrow} \quad f'(x)=5\cdot(2\cdot x+3)^4\cdot 2=10\cdot(2\cdot x+3)^4}$ .Das schreibt ihr aber nicht auf euer Blatt, denn diese Methode ist nicht ganz mathematisch korrekt.

- $f(x)=e^{x^2}$
  Hier muss wieder die innere Funktion bestimmt werden: $h(x)=x^2$, $h'(x)=2\cdot x$. f hat dann die Form: $f(x)=e^{h(x)}$. Für die Ableitung gilt dann: $f'(x)=e^{h(x)}\cdot h'(x)=e^{x^2}\cdot 2\cdot x$. Auch hier nochmals die Umformung: $f'(x)=(e^{\Delta})'\cdot\Delta'=e^{\Delta}\cdot\Delta'$

- $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2}$
  Bei dieser Funktion sieht es so aus, als müsste man die Quotientenregel benutzen. Aber man kann f auch als eine Verkettung ansehen, und zwar: $f(x)=(x^2+2)^{-1}$. Das heißt also unsere innere Funktion lautet: $h(x)=x^2+2$. Damit erhalten wir: $f(x)=(h(x))^{-1}$ und können ableiten:

  $$f'(x)=(h(x))^{-1}\cdot h'(x)=-1\cdot(x^2+2)^{-2}\cdot 2\cdot x=-\frac{2\cdot x}{(x^2+2)^2}\ .$$

  Also merkt euch: Steht im Zähler kein x, so benutzt ihr die Kettenregel.

- $f_t(x)=\tan(t\cdot x^4)$
  Auch hier wieder die innere Funktion bestimmen: $h_t(x)=t\cdot x^4$, $h_t'(x)=t\cdot 4\cdot x^3$. t wird auch hier nicht abgeleitet, da t nur ein Parameter ist. Dann wieder in die Funktion einsetzen: $f_t(x)=\tan(h(x))$.

  Danach ableiten: $f_t'(x)=\dfrac{1}{\cos^2(h(x))}\cdot h'(x)=\dfrac{1}{\cos^2(t\cdot x^4)}\cdot t\cdot 4\cdot x^3=\dfrac{4\cdot t\cdot x^3}{\cos^2(t\cdot x^4)}$

- $f(x)=\ln((3\cdot x^2-1)^{100})$
  Auch hier können wir wieder die Kettenregel anwenden. Diesmal ist aber unsere innere Funktion wieder eine Verkettung: $h(x)=(3\cdot x^2+1)^{100}$, $h'(x)=100\cdot(3\cdot x^2+1)^{99}\cdot 6\cdot x=600\cdot x\cdot(3\cdot x^2+1)^{99}$

  Dann nur noch einsetzen: $f'(x)=\dfrac{1}{h(x)}\cdot h'(x)=\dfrac{1}{(3\cdot x^2+1)^{100}}\cdot 600\cdot x\cdot(3\cdot x^2+4)^{99}=\dfrac{600\cdot x}{3\cdot x^2+1}$

Kombinierte Ableitungen:

Jetzt kennt ihr die einzelnen Ableitungsregeln, nun müsst ihr nur noch lernen sie in Kombination zu benutzen. Dazu ist es wichtig die Struktur des Terms zu erkennen. Geht immer von Außen nach Innen. Das bedeutet, schaut einfach auf die letzte Verknüpfung. Diese legt immer fest, welche Ableitungsregel ihr benutzen müsst. Achtet aber auch darauf, ob sich diese letzte Verknüpfung nicht geschickter darstellen lässt.

Beispiele:

- $f(x)=2\cdot x\cdot\ln(x^2+1)$
  Hier ist die letzte Verknüpfung eine Multiplikation, also benutzen wir die Produktregel. Die Funktionen sind: $g(x)=2\cdot x$, $h(x)=\ln(x^2+1)$. g können wir wieder sehr einfach ableiten: $g'(x)=2$. h ist jedoch eine Verkettung, also benötigen wir die Kettenregel. Die innere Funktion bei h ist x^2+1 . Damit ergibt sich für die Ableitung: $h'(x)=\frac{2\cdot x}{x^2+1}$. Das dann in die Produktregel eingesetzt: $f'(x)=2\cdot\ln(x^2+1)+2\cdot x\cdot\frac{2\cdot x}{x^2+1}=2\cdot\ln(x^2+1)+\frac{4\cdot x^2}{x^2+1}$.

- $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+1}}$
  Auch hier bestimmen wir wieder die Funktionen der Quotientenregel. $g(x)=x$, $g'(x)=1$ und $h(x)=\sqrt{x+1}$, $h'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x+1}}$. Das wiederum eingesetzt:
  $$f'(x)=\frac{1\cdot\sqrt{x+1}-x\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}^{\,2}}=\frac{\frac{1}{2\cdot\sqrt{x+1}}\cdot(2\cdot(x+1)-x)}{x+1}=\frac{(x+2)}{2\cdot\sqrt{x+1}\cdot(x+1)}=\frac{(x+2)}{2\cdot\sqrt{x+1}^{\,3}}$$
  Wir haben euch dieses Beispiel gezeigt, damit ihr euch merkt, die Ableitung des Nenners auszuklammern, wenn der gesamte Nenner unter der Wurzel steht.

- $f(x)=\frac{e^{-x}\cdot x}{\sin(2\cdot x)+\sqrt{3\cdot x}}$
  Hier benötigt man zunächst die Quotientenregel, die Funktionen lauten: $g(x)=e^{-x}\cdot x$ und $h(x)=\sin(2\cdot x)+\sqrt{3\cdot x}$. Um nun g abzuleiten, benötigen wir die Produktregel. Also spalten wir g wieder in 2 Funktionen auf: $g_1(x)=e^{-x}$ und $g_2(x)=x$. Damit ergibt sich für g' :

  $g'(x)=-e^{-x}\cdot x+e^{-x}\cdot 1=e^{-x}\cdot(1-x)$, da $g_1'(x)=-e^{-x}$ (Kettenregel). Um h abzuleiten benötigen wir wieder die Summenregel, danach wieder die Kettenregel: $h'(x)=2\cdot\cos(2\cdot x)+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3\cdot x}}$.

  Damit können wir die Ableitung von f bilden:
  $$f'(x)=\frac{e^{-x}\cdot(1-x)\cdot(\sin(2\cdot x)+\sqrt{3\cdot x})-e^{-x}\cdot x\left(2\cdot\cos(2\mathrm{x})+\frac{3}{2\sqrt{3\mathrm{x}}}\right)}{(\sin(2\cdot x)+\sqrt{3\cdot x})^2}$$

Lasst euch von diesem Beispiel nicht verunsichern. Wir wollten nur mal eins machen, bei dem ihr alle Ableitungsregeln benutzen müsst. Solche Funktionen werden euch auf eurem Weg zum Abi nicht begegnen.

Zusammenfassung:

Hier nochmal eine kurze Zusammenfassung der Ableitungsregeln und ein paar Tricks, wie man mit ihnen geschickt umgeht.

$f(x)=c \quad , \quad c\in\mathbb{R}$	$\Rightarrow$	$f'(x)=0$	$(konst.\ Funktion)$
$f(x)=c\cdot g(x) \quad , \quad c\in\mathbb{R}$	$\Rightarrow$	$f'(x)=c\cdot g'(x)$	$(konst.\ Faktor)$
$f(x)=x^n$	$\Rightarrow$	$f'(x)=n\cdot x^{n-1}$	$(Potenzregel)$
$f(x)=g(x)+h(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x)=g'(x)+h'(x)$	$(Summenregel)$
$f(x)=g(x)\cdot h(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x)=g'(x)\cdot h(x)+g(x)\cdot h'(x)$	$(Produktregel)$
$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$	$\Rightarrow$	$f'(x)=\frac{g'(x)\cdot h(x)-g(x)\cdot h'(x)}{h^2(x)}$	$(Quotientenregel)$
$f(x)=g(h(x))$	$\Rightarrow$	$f'(x)=h'(x)\cdot g'(h(x))$	$(Kettenregel)$

Abbildung 36: Ableitungsregeln mit Bewertung

In Abbildung 36 seht ihr nochmals alle Ableitungsregeln mit unserer Bewertung auf Benutzbarkeit. Wir empfehlen euch die Produktregel und die Quotientenregel zu vermeiden, falls das möglich ist. Alle anderen Regeln eignen sich gut zum Ableiten bzw. später zum Integrieren (vgl. Abschnitt II.1.44 auf Seite 120). Wir zeigen euch jetzt nochmal , wie ihr die einzelnen Regeln besser benutzen könnt, bzw. wie ihr vermeiden könnt, die Produkt- bzw. Quotientenregel zu benutzen.

Konstante Funktion, konstanter Faktor, Potenzregel, Summenregel:

Diese Regeln benutzt ihr immer falls das möglich ist. Sie sind die einfachsten, die es gibt. Später beim Integrieren werdet ihr auch feststellen, dass das Aufleiten fast unmöglich ist, wenn man diese Regeln nicht benutzt. Also freut euch immer, wenn ihr eine dieser vier Regeln benutzen könnt.

Kettenregel:

Auch hier gilt, nehmt die Kettenregel, falls ihr könnt. Wir zeigen euch den Gebrauch der Kettenregel nochmals an einem Beispiel. Wir nennen die Kettenregel auch ab und zu mal die *Kästchenableitung*. Ihr könnt diese Ableitung immer benutzen, wenn eine Funktion in einer anderen verbaut ist. Also wenn es sich um eine Verkettung handelt.

$$f(x)=\sin\boxed{(x^2+1)}$$
$$f'(x)=\cos\boxed{(x^2+1)}\cdot\boxed{2x}'$$

Abbildung 37: Kästchenregel

Wie ihr in Abbildung 37 erkennen könnt, ersetzen wir die innere Funktion durch ein Kästen. Danach könnt ihr einfach das Kästchen als x interpretieren. Die Ableitung von sin(x) ist cos(x), also ist die Ableitung von sin(Kästchen) cos(Kästchen). Dann müsst ihr nur noch beachten, dass bei der Kettenregel immer noch ein Kästchen' hinzukommt. Dann wieder einsetzen und ihr erhaltet die Ableitung.