

## Gegenseitige Lage von Geraden

Allgemeine Geradengleichung:  $g: \vec{x} = \vec{OA} + t \cdot \vec{AB}$

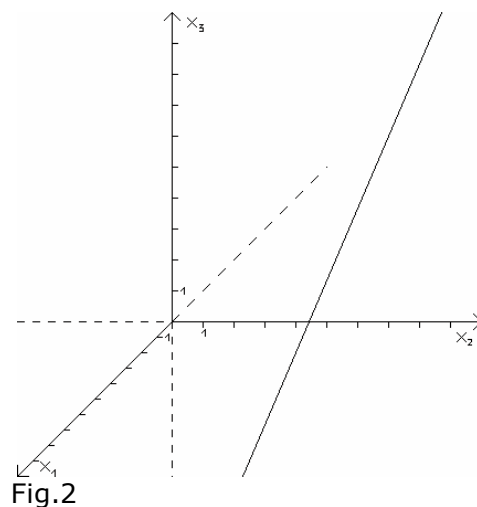
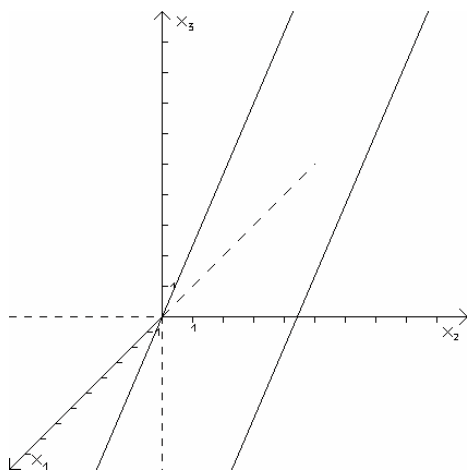
Aufgabe: Gegeben sind die Punkte A (2/1/-4) und B (4/0/1). Stelle eine Gerade in der allgemeinen Geradenform auf.

Für Geraden gibt es verschiedene Lagemöglichkeiten:

### Identisch oder Parallel:

Die Geraden g und h sind dann parallel (Fig.1) oder identisch (Fig.2) wenn die Richtungsvektoren linear abhängig sind.

Durch die Punktprobe mit einem Stützvektor ist zu prüfen, ob der Punkt der einen Geraden auf der anderen Geraden liegt (=parallel+identisch) oder nicht (=parallel+räumlich getrennt).



Schneiden sich oder sind Windschief:

Die Geraden  $g$  und  $h$  schneiden sich (Fig.3) oder sind windschief zueinander (Fig.4) wenn ihre Richtungsvektoren linear unabhängig sind.

Durch Gleichsetzen kann dies gelöst werden: Hat das LGS keine Lösung, dann sind  $g$  und  $h$  windschief, hat das LGS genau eine Lösung dann schneiden sie sich. Der Schnittpunkt ergibt sich durch Einsetzen der Lösung in die Geradengleichung.

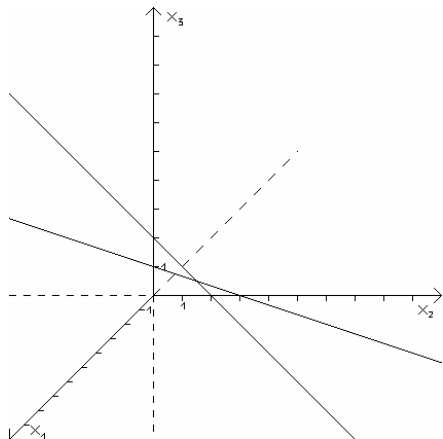


Fig.3

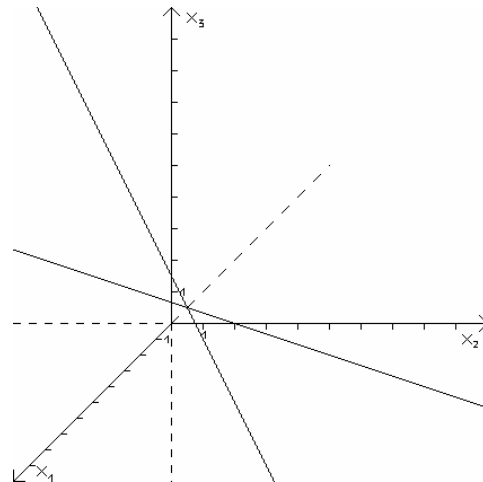


Fig.4

Bemerkung: Dies ist nur eine Projektion der Geraden, deshalb scheint es als würden sich die Geraden schneiden, aber sie liegen in unterschiedlichen „Etagen“.

**Übersicht der verschiedenen Lagemöglichkeiten:**

<b>Identisch</b>	<b>Parallel</b>	<b>Schneiden sich</b>	<b>Windschief</b>
<u>Richtungsvektoren sind linear abhängig!</u>		<u>Richtungsvektoren sind linear unabhängig!</u>	
Stützvektor $g \in h$ oder andersrum. Rechnerisch Durch Punkt-Probe.		$g$ und $h$ schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt. Rechnerisch durch $g = h$ . Auflösen mit LGS	
Treten diese Fälle nicht ein, dann sind die Geraden $g$ und $h$ parallel!		Tritt dieser Fall nicht ein, dann sind $g$ und $h$ windschief!	

Beispiel 1:

Die Geraden g und h sind gegeben. Berechne ihre gegenseitige Lage.

$$g: x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \quad h: x = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2:

Die Geraden g und h sind gegeben. Berechne ihre gegenseitige Lage. Gib gegebenenfalls einen Schnittpunkt S an.

$$g: x = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad h: x = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgaben:

- 1) Untersuche ob die Geraden g und h identisch, parallel, windschief sind oder sich schneiden. Bestimme beim letztgenannten Fall den Schnittpunkt S, falls vorhanden.

$$g: x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad h: x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- 2) Für welchen Wert des Parameters  $t \in \mathbb{R}$  sind die Geraden g und h parallel?

$$g: x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0,5t \\ t \\ 4 \end{pmatrix} \quad h: x = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$