Klassenarbeit 1 Thema Wachstum

1.Aufgabe (12Punkte)

a) Bei einer Studie zur Gewichtsentwicklung von Hennen, die nur Körnerfutter bekamen, wurde festgestellt, dass sich nach sechs Lebenswochen das Gewicht verfünffacht hatte. Eine Henne wog dann 350 g.

Um wie viel Prozent hatte das Gewicht pro Woche zugenommen, wenn man exponentielles Wachstum annimmt?

Wann wog eine Henne 200 g?

b) Es stellte sich heraus, dass sich die Gewichtsentwicklung besser mit dem Gesetz
$B(t+1) = 1{,}294 \cdot B(t) - 0{,}000147 \cdot (B(t))^2$ (t in Lebenswochen, B(t) in Gramm)
beschreiben lässt.
Zeige, dass es sich um logistisches Wachstum der Form

$$B(t+1) = B(t) + k \cdot B(t) \cdot (S - B(t))$$

handelt.
Welches Gewicht hat demnach eine Henne nach 8 Lebenswochen, wenn man von 350 g nach 6 Lebenswochen ausgeht?

c) In der 6.Lebenswoche brauchte eine Henne 380 g, in der 7.Lebenswoche 460 g und in der 8.Lebenswoche 532 g Körnerfutter.
Der Futterverbrauch pro Woche und Henne verlief nach dem Wachstumsgesetz

$F(t+1) = F(t) + k \cdot (S - F(t))$ (t in Lebenswochen, F(t) in Gramm)

Bestimme k und S.
Wie viel Gramm Futter braucht eine Henne höchstens pro Woche?

2.Aufgabe (12Punkte)

Zu Beginn des Jahres 1960 hatte die Stadt Gotham City 30000 Einwohner, zu Beginn des Jahres 2005 waren es 50500.
Zu Beginn des Jahres 1960 hatte die Stadt Zion 40000 Einwohner. Ihre Einwohnerzahl nahm seither infolge des Wegzugs der jungen Bevölkerung jährlich um 1% ab.

a) Um welchen Prozentsatz nahm die Einwohnerzahl von Gotham City jährlich zu, wenn man exponentielles Wachstum voraussetzt?
In welchem Jahr konnten die Gotham City Bewohner den 40000-ten Einwohner feiern?

b) In welchem Jahr hatten beide Städte gleich viele Einwohner?

c) Im Gotham City Stadtteil „Bronx“ (1000 Einwohner) verbreitet sich derzeit ein Gerücht. Am Anfang kannten 2 Einwohner das Gerücht, eine Stunde später wussten bereits 2 weitere Einwohner davon. Man kann bei diesem Vorgang von logistischem Wachstum der Form

$$B(t+1) = B(t) + k \cdot B(t) \cdot (S - B(t))$$

ausgehen.
Wie viele Einwohner kannten das Gerücht demnach nach 3 Stunden?
In der wievielten Stunde lag der stündliche Zuwachs erstmals über 15 Personen?

<u>Lösungswege</u>

Aufgabe 1

a)
allgemein exponentielle Wachstumsgl.: $B(t) = B(0) \cdot a^t$; t in Lebenswochen.

Wachstumsfaktor a pro Woche zeigt die prozentuale Zunahme an: $a = \sqrt[6]{5} = 1{,}3076.$
Damit ergibt sich also eine prozentuale Zunahme von 30,76% pro Woche.

Wann wog eine Henne 200 g?
B(0)=70 g, da sich ja das Gewicht nach 6 Wochen verfünffacht hat. Damit war das Ausgangsgewicht B(0)=70 g.

Wachstum der Hennen folgt der Wachstumsgl.: $B(t) = 70 \cdot 1{,}3077^t \rightarrow$

$$200 = 70 \cdot 1{,}3077^t \rightarrow \log\frac{200}{70} = \log 1{,}3077^t \rightarrow \log 2{,}857 = t \cdot \log 1{,}3077 \rightarrow t = \frac{\log 2{,}857}{\log 1{,}3077}$$

$\rightarrow t = 3{,}91$ Wochen.

b)
$B(t+1) = 1{,}294 \cdot B(t) - 0{,}000147 \cdot B^2(t)$

Anpassung auf übliche Form des logistischen Wachstums ($B(t+1) = B(t) + k \cdot B(t) \cdot (S - B(t))$):

$B(t+1) = B(t) + 0{,}294 \cdot B(t) - 0{,}000147 \cdot B^2(t)$ B(t) ausklammern:
$B(t+1) = B(t) + B(t) \cdot (0{,}294 - 0{,}000147 \cdot B(t))$ 0,000147 ausklammern:
$B(t+1) = B(t) + 0{,}000147 \cdot B(t) \cdot (2000 - B(t))$

Damit ist also k=0,000147 und S=2000.

$B(6) = 350\,g.$
$B(7) = 434{,}9\,g.$
$B(8) = 534{,}9\,g.$

Antwort: Eine Henne hat demnach also ein Gewicht von 534,9 g nach 8 Lebenswochen.

c)
Es sind jetzt die beiden Unbekannten k und S gesucht. Also muß man auch 2 Gleichungen aufstellen, um diese zu errechnen. Mit Hilfe der Angaben ergibt sich:

1) $532 = 460 + k \cdot (S - 460) \rightarrow k = \frac{72}{S - 460}$

2) $460 = 380 + k \cdot (S - 380) \rightarrow k = \frac{80}{S - 380}$

Jetzt darf man 1) und 2) gleichsetzen: $\frac{72}{S-460}=\frac{80}{S-380}$. Jeweils mit den Nennern multiplizieren: $72\cdot(S-380)=80\cdot(S-460)\to 72S-27360=80S-36800$
$\to -8S=-9440\to 8S=9440\to S=1180.$

S zurück in die Gleichung 1): $k=\frac{72}{1180-460}\to k=0{,}1.$

S=1180 und k=0,1.

Da die Gleichung aus der Aufgabenstellung eine Gleichung für den Futterverbrauch pro Woche ist, stellt also S die Obergrenze des Futterverbrauchs einer Henne pro Woche da.

Antwort: Eine Henne braucht maximal 1180 g Futter pro Woche.

Aufgabe 2

a)
Das allgemein exponentielle Wachstum genügt folgender Funktion:

$$B(t)=B(0)\cdot a^t$$

Das Jahr 1960 wird als t=0 betrachtet $\to B(0)=30000$ Einwohner.
Daraus folgt, dass $B(45)=50500$ Einwohner.

Diese Angaben in die Wachstumsfunktion: $50500=30000\cdot a^{45}\to a=\sqrt[45]{\frac{50500}{30000}}=1{,}01164$

Aus den Nachkommastellen des Wachstumsfaktors läßt sich die prozentuale Zunahme ablesen:

Prozentuale jährliche Zunahme: 1,164%.

<u>**40000ster Einwohner?**</u>

$$40000=30000\cdot 1{,}01164^t\to 1{,}01164^t=\frac{40000}{30000}\to 1{,}01164^t=\frac{4}{3}\to$$

mit 10er-log: $\log 1{,}01164^t=\frac{4}{3}\to t\cdot\log 1{,}01164=\log\frac{4}{3}\to t=\frac{\log\frac{4}{3}}{\log 1{,}01164}=$ **24,86 Jahre.**

D.h. im Jahr 1960+25 Jahre=1985 konnten die Gotham City Bewohner Ihren 40000sten Einwohner feiern.

b)

Einwohnerzahl von Gotham City: $B(t) = 30000 \cdot 1{,}01164^t$

Einwohnerzahl von Zion: $G(t) = 40000 \cdot 0{,}99^t$

(bei einer Abnahme bzw. Zerfall, wird von der Zahl 1 der entsprechende Bruchteil abgezogen, um a zu ermitteln. Hier eben 1-0,01=0,99.).

Gleich viele Einwohner haben beide Städte dann, wenn B(t)=G(t):

$$30000 \cdot 1{,}01164^t = 40000 \cdot 0{,}99^t \rightarrow \left(\frac{1{,}01164}{0{,}99}\right)^t = \frac{40000}{30000} \rightarrow (1{,}02186)^t = \frac{4}{3} \rightarrow$$

mit dem 10er-log: $t \cdot \log 1{,}02186 = \log\frac{4}{3} \rightarrow t = \dfrac{\log\frac{4}{3}}{\log 1{,}02186} =$ **13,3 Jahre.**

Also im Jahr 1973-1974 hatten beide Städte gleich viel Einwohner.

c)

Das Gerücht verbreitet sich nach dem Modell des logistischen Wachstums:

$$B(t+1) = B(t) + k \cdot B(t) \cdot (S - B(t))$$

Die Einwohnerzahl des Stadtteils Bronx (1000) ist als Schranke S anzusehen.

B(0)=2 und B(1)=4 sind in der Aufgabe angegeben.

Damit lässt sich k ermitteln:

$$4 = 2 + k \cdot 2 \cdot (1000 - 2) \rightarrow 2 = k \cdot 1996 \rightarrow k = \frac{2}{1996} = 0{,}001002$$

$$B(2) = 4 + 0{,}001002 \cdot 4 \cdot (1000 - 4) \rightarrow B(2) = 8$$

$$B(3) = 8 + 0{,}001002 \cdot 8 \cdot (1000 - 8) \rightarrow B(3) = 16$$

16 Einwohner kannten also das Gerücht nach 3 Stunden.

<u>Wann lag der stündliche Zuwachs erstmals über 15 Personen?</u>

$$B(4) = 16 + 0{,}001002 \cdot 16 \cdot (1000 - 16) \rightarrow B(4) = 31{,}77$$

Von der 3. auf die 4. Stunde erhöht sich die Zahl der Wissenden von 16 auf über 31. Damit liegt der stündliche Zuwachs in der 4.Stunde erstmals über 15 Personen.