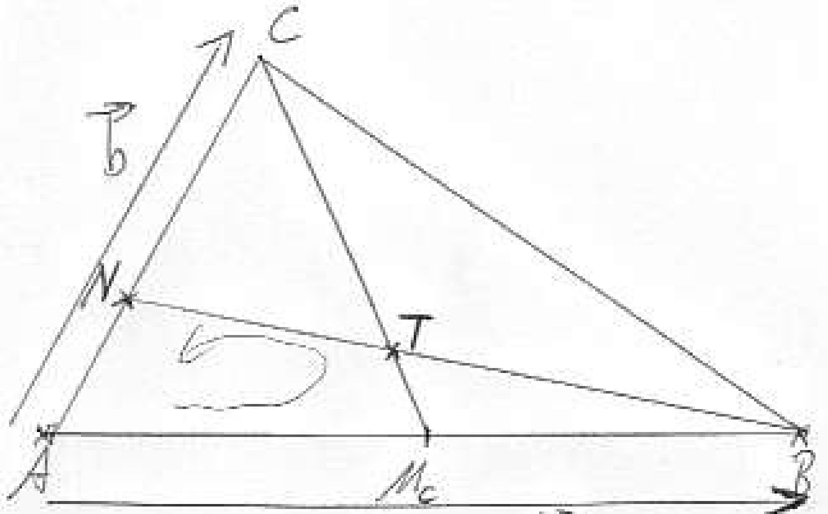
Teilverhältnisse (Analytische Geometrie) + Vektorielle Beweise

Die Aufgaben über Teilverhältnisse haben fast alle den gleichen Verlauf. Deswegen werden ich die wichtigen Punkte anhand der Rechnung des Abiturs 1999, Baden-Württemberg, erklären. Hat man da das meiste verstanden, dann sollte man gerüstet sein.

Wortlaut der Aufgabe im d)-Teil:

„In einem Dreieck ABC ist M_C der Mittelpunkt der Seite AB.
Der Punkt N liegt auf der Seite AC. Es gilt $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
T ist der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden M_CC und der Strecke NB.
In welchem Verhältnis teilt T die Strecken M_CC und NB?"

Der Text muß zunächst in eine Skizze übersetzt werden:



1. wichtiger Punkt: Einführung von 2 linear unabhängigen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (in der Ebene sind 2 Vektoren, die nicht parallel sind automatisch linear unabhängig).

Es wurde $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ und $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ gewählt. (Man hätte aber auch genausogut $\overrightarrow{BC}$ anstelle von $\overrightarrow{AB}$ oder $\overrightarrow{AC}$ nehmen können).

2. wichtiger Punkt: einen „geschlossenen Vektorzug" aufstellen.

D.h. man stellt eine Gleichung in Form einer vektoriellen Addition auf. Man endet dabei in dem Punkt, indem man begonnen hat. Das ergibt somit den Nullvektor $\vec{0}$.

Einzige Bedingung der Gleichung: Sie muß über den Punkt verlaufen, der das Teilverhältnis darstellt (hier also T) und dort „abknicken".

In unserem Bsp. wähle ich: $\overrightarrow{AM_c}+\overrightarrow{M_cT}+\overrightarrow{TN}+\overrightarrow{NA}=\vec{0}$

(Ich hätte auch jedes andere Teildreieck der Skizze nehmen können; z.B. $\overrightarrow{M_cB}+\overrightarrow{BT}+\overrightarrow{TM_c}=\vec{0}$).

3. wichtiger Punkt: Ziel ist es jetzt die obige Gleichung nur noch durch die linear unabh. Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auszudrücken:

$$\boxed{\overrightarrow{AM_c}=\frac{1}{2}\vec{a}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\overrightarrow{M_cT}=x\cdot\overrightarrow{M_cC}\ ;\ \overrightarrow{M_cC}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}\\ \Rightarrow \overrightarrow{M_cT}=x\cdot\left(\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\overrightarrow{TN}=y\cdot\overrightarrow{BN}\ ;\ \overrightarrow{BN}=-\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\\ \Rightarrow \overrightarrow{TN}=y\cdot\left(\frac{1}{3}\vec{b}-\vec{a}\right)\end{array}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{NA}=-\frac{1}{3}\vec{b}}$$

$\Longrightarrow$

Daraus folgt folgende Gleichung:

$$\frac{1}{2}\vec{a}+x\cdot\left(\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)+y\cdot\left(\frac{1}{3}\vec{b}-\vec{a}\right)-\frac{1}{3}\vec{b}=\vec{0}$$

Auflösen und nach $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sortieren:

$$\frac{1}{2}\vec{a}+x\cdot\vec{b}-\frac{1}{2}x\cdot\vec{a}+\frac{1}{3}y\vec{b}-y\cdot\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{a}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x-y\right)+\vec{b}\cdot\left(x+\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}\right)=\vec{0}$$

2 linear unabhängige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ können nie so addiert werden, daß man den Nullvektor $\vec{0}$ erhält. Außer, na?, außer sie sind selbst der Nullvektor. Also wenn die Klammer $=0$ gesetzt wird.

Egal, ob man dies jetzt verstanden hat oder nicht:

4. wichtiger Punkt: Klammern $=0$ setzen.

$$\Rightarrow \text{(1)}\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}x-y=0 \qquad \text{(2)}\ x+\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}-\frac{1}{2}x=y \xrightarrow{\text{Einsetzen}} x+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\right)-\frac{1}{3}=0$$

$$\Rightarrow x+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}=0$$

$$\Rightarrow \frac{5}{6}x-\frac{1}{6}=0 \Rightarrow \frac{5}{6}x=\frac{1}{6}$$

$$x=\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{5}=\underline{\underline{\frac{1}{5}}} \qquad \Rightarrow$$

in ① einsetzen: $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = y$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = y$$

$$\Rightarrow \frac{4}{10} = \underline{\underline{\frac{2}{5} = y}}$$

X wurde für das Verhältnis der Strecke $\overline{M_cC}$ und Y wurde für das Verhältnis der Strecke $\overline{BN}$ angesetzt.

T teilt $\overline{M_cC}$ im Verhältnis $1:4$

T teilt $\overline{NB}$ im Verhältnis $2:3$.

Die allgemeine Vorgehensweise stellen die Punkte 1–4 dar. Manchmal wird auch nur ein vektorieller Beweis benötigt (siehe Abi 2005 BW), ohne ein Teilverhältnis. Für vektorielle Beweise reicht meistens der <u>1. wichtige Punkt</u> zur Bearbeitung völlig aus.