Das Vektorprodukt

1. Was ist Vektorprodukt?

Für das Produkt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gibt es zwei Möglichkeiten:

Das Ergebnis ist ein Skalar, also eine Zahl, welche als Skalarprodukt beider Vektoren bezeichnet wird.

Das Ergebnis ist ein zum Vektor $\vec{a}$ und zum Vektor $\vec{b}$ orthogonaler Vektor $\vec{c}$; er wird als Vektorprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bezeichnet.

man schreibt: $\vec{a} \times \vec{b}$ und sagt: "a Kreuz b"

Bemerkung: Das Vektorprodukt ist nur dreidimensional definiert.

2. Algebraische Bedeutung oder wie berechnet man das Vektorprodukt

Mithilfe der Einheitsvektoren $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ und $\vec{e_3}$ kann das Produkt als Determinante geschrieben werden:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Entwickeln nach der 1.Reihe:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{e_1}\,(a_2b_3 - a_3b_2) - \vec{e_2}(\,a_1b_3 - a_3b_1) + \vec{e_3}(a_1b_2 - a_2b_1) = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Dadurch sieht man, wie man das Vektorprodukt berechnen kann.

Diese "Endformel" benutzt man dann jedes mal bei der Berechnung des Vektorprodukts.

Beispiel:

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ soll bestimmt werden:

$\vec{a} = (2/\,-1/\,4)$ $\qquad$ $\vec{b} = (-3/\,4/\,5)$

Laut der oberen Formel, muss gelten:

$\vec{a} \times \vec{b} = (-5 - 16/\,-12 - 10/\,8 - 3\,) = (\,-21/\,-22/\,5)$

3. Geometrische Bedeutung

3.1. Orthogonalität der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zum Vektor $\vec{c}$

Dass der Vektor $\vec{c}$ zu den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal ist, lässt sich mithilfe des Skalarprodukts beweisen:

$\vec{c} * \vec{a} = (c_1/ c_2/ c_3) * (a_1/ a_2/ a_3) = (a_2b_3 - a_3b_2/ a_3b_1 - a_1b_3/ a_1b_2 - a_2b_1) * (a_1/ a_2/ a_3) =$

$= a_1 (a_2b_3 - a_3b_2) + a_2 (a_3b_1 - a_1b_3) + a_3 (a_1b_2 - a_2b_1) =$

$= a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2 - a_2a_3b_1 = 0$

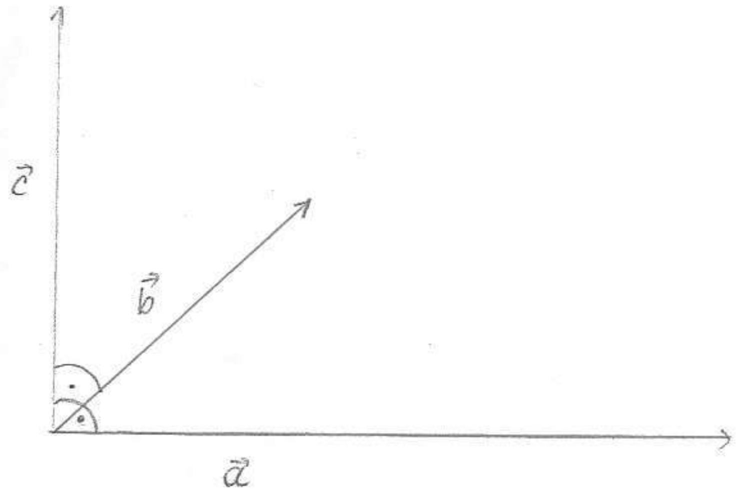
Wegen $\vec{c} * \vec{a} = 0$ stehen die Vektoren aufeinander senkrecht.

$\vec{c} * \vec{b} = (c_1/ c_2/ c_3) * (b_1/ b_2/ b_3) = (a_2b_3 - a_3b_2/ a_3b_1 - a_1b_3/ a_1b_2 - a_2b_1) * (b_1/ b_2/ b_3) =$

$= b_1 (a_2b_3 - a_3b_2) + b_2 (a_3b_1 - a_1b_3) + b_3 (a_1b_2 - a_2b_1) =$

$= a_2b_1b_3 - a_3b_1b_2 + a_3b_1b_2 - a_1b_2b_3 + a_1b_2b_3 - a_2b_1b_3 = 0$

Wegen $\vec{c} * \vec{b} = 0$ stehen die Vektoren aufeinander senkrecht.



=> Mithilfe des Vektorproduktes ist eine einfache Möglichkeit zum Bestimmen eines Normalenvektors einer Ebene gefunden.

Beispiel:

Bestimmen Sie den Normalenvektor der Ebene

E: $\vec{x}$ = (10/ 5/ 1) + r (2/ 1/ 3) + s (-2/ 4/ 1)

Man berechnet $\vec{r} \times \vec{s}$:

= ($r_2s_3 - r_3s_2$/ $r_3s_1 - r_1s_3$/ $r_1s_2 - r_2s_1$) =

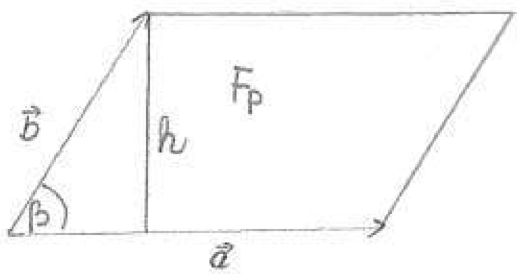
= (1 - 3*4/ -6-2/ 8+2) = (-11/ -8/ 10)

Der Vektor (-11/ -8/ 10) ist der Normalenvektor der Ebene E.

3.2. Fläche des Parallelogramms

Wie berechnet man eigentlich die Fläche eines Parallelogramms, das durch dir Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird ? Und in welchem Zusammenhang steht die Längenmaßzahl des Vektors $\vec{c}$ also $|\vec{c}|$ mit der Fläche des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms ?

Um diese Fragen beantworten zu können, muss man zuerst Paar Vorüberlegungen anschaffen:



Mit $|\vec{a}|$ = a, $|\vec{b}|$ = b und h / b = sin ß, also h = b * sin ß, gilt für den Flächeninhalt F_P dann die folgende Formel:

F_P = a*b* sin ß

Aus $(\sin ß)^2 + (\cos ß)^2 = 1$ folgt $(\sin ß)^2 = 1 - (\cos ß)^2$, also $\sin ß = \sqrt{1 - (\cos ß)^2}$

$F_P = a*b*\sqrt{1 - (\cos ß)^2} = \sqrt{a^2b^2*(1 - (\cos ß)^2)} = \sqrt{a^2b^2 - a^2b^2(\cos ß)^2} = \sqrt{a^2b^2 - (a*b*\cos ß)^2}$

Wegen $\vec{a}^2 = a * a = a * a * \cos 0 = a * a * 1 = a^2$

ebenso $\vec{b}^2 = b^2$ und $(a*b*\cos ß)^2 = (\vec{a}*\vec{b})^2$ gilt dann:

$F_P = \sqrt{\vec{a}^2 * \vec{b}^2 - (\vec{a}*\vec{b})^2}$

In der Koordinatendarstellung lautet dann die Formel:

$F_P = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2}$

Nach dem Ausrechnen bleibt übrig:

$F_P = \sqrt{(a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2}$

Im Hinblick auf die spätere Verwendung der Formel, ersetzt man $(a_1b_3 - a_3b_1)^2$ mit $(a_3b_1 - a_1b_3)^2$:

Für den Flächeninhalt des Parallelogramms gilt also:

$F_P = \sqrt{(a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2}$

Von den Quadranten der Differenzen in dieser Wurzel betrachtet man nun die Differenzen und bezeichnet sie als:

$c_1 = a_1b_2 - a_2b_1$

$c_2 = a_3b_1 - a_1b_3$

$c_3 = a_2b_3 - a_3b_2$

Mit dieser Bezeichnung muss dann gelten:

$F = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2$

Um die Länge des Vektors $\vec{c}$ ausrechnen zu können muss man den Betrag des Vektors ausrechnen:

$|\vec{c}| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$

Aus diesen Überlegungen kann man erschließen, dass die Maßzahl des Flächeninhalts eines durch Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms, die man als Betrag des Vektorprodukts der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ berechnen kann, der Längenmaßzahl des Vektors $\vec{c}$, also $|\vec{c}|$ entspricht.

Diese geometrische Eigenschaften des Vektorprodukts kann man bei zahlreichen Rechnungen wie schon am Beispiel aus 3.1. gezeigt benutzen.

Beispiel:

Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks A (1/ 2/ 3); B (4/ 4/ 4); C (5/ 6/ 7)

Für den Flächeninhalt eines Dreiecks muss gelten: $A = 1/2\ \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ (Die Hälfte vom Parallelogramm)

Einsetzen: $A = 1/2\ (3/ 2/ 1) \times (4/ 4/ 4) = (2/ -4/ 2) = 4 + 16 + 4 = 24 = 2\ 6$

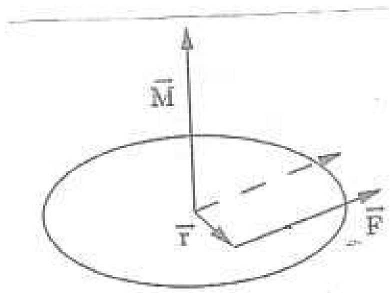
Der gesuchte Flächeninhalt beträgt etwa 4.9 Flächeneinheiten.

4. Anwendung in der Physik:

Beim Berechnen des Drehmoments $\vec{M}$ wird dem Produkt aus Radiusvektor $\vec{r}$ und Kraftvektor $\vec{F}$ mit dem Drehmoment $\vec{M}$ ein Vektor zugeordnet.

Der Drehmomentvektor $\vec{M}$ ist orthogonal zum Radiusvektor $\vec{r}$ und zum Kraftvektor $\vec{F}$.

Man kann also den Drehmoment $\vec{M}$ als Vektorprodukt der Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{F}$ berechnen.



Quellenangabe:

LS Kursstufe, Ernst Klett Verlag, Stuttgart 2004; Seite 307

Mathematik, Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Mentorverlag München, 1999; Seite 60 - 63

Abi - Countdown Analytische Geometrie Leistungskurs, Manz Verlag 1999, Seite 50 - 53