Zusammenfassung allgemeines und beschränktes Wachstum mit Differentialgl.! 12./13. Klasse

Das Thema „Wachstum" wurde in der 10. Klasse schon einmal durchgekaut. Mit dem Unterschied, daß damals das Wachstum über die Basis $f(t) = f(0) \cdot a^t$ angeglichen wurde. In der Oberstufe werden Wachstumsprozesse durch die e^x bzw. e^t-Funktion beschrieben und das Tempo des Wachstumsprozesses wird durch Einführung einer Wachstumskonstanten K angeglichen $\left(e^{k \cdot t}\right)$. Da die meisten natürlichen Wachstums- und Zerfallsprozesse weniger schnell als e^t wachsen/zerfallen, ist K immer sehr klein, um die Stärke von e^t zu „mildern".

Ist $K > 0 \Rightarrow$ Wachstum.

Ist $K < 0 \Rightarrow$ Zerfall.

Innerhalb des Wachstums stellt die „Differentialgleichung" v.a. des beschränkten Wachstums noch eine Besonderheit dar, auf die ich noch später eingehe.

Zunächst die Abhandlung des allg. Wachstums unter a).
Dann beschränktes Wachstum unter b).

a) allg. Wachstum / Zerfall

Gleichung: $f(t) = f(0) \cdot e^{k \cdot t}$

$f(0) \hat{=}$ Ausgangsmenge zum Zeitpunkt $t=0$ / Anfangsbestand

$k \hat{=}$ Wachstumskonstante

Schaubild für $k>0$:

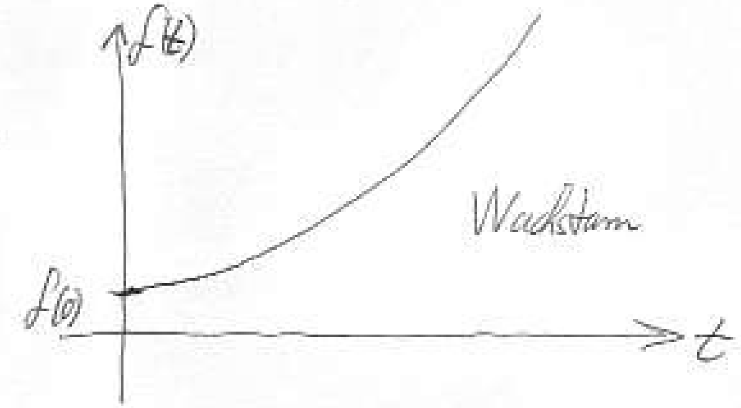
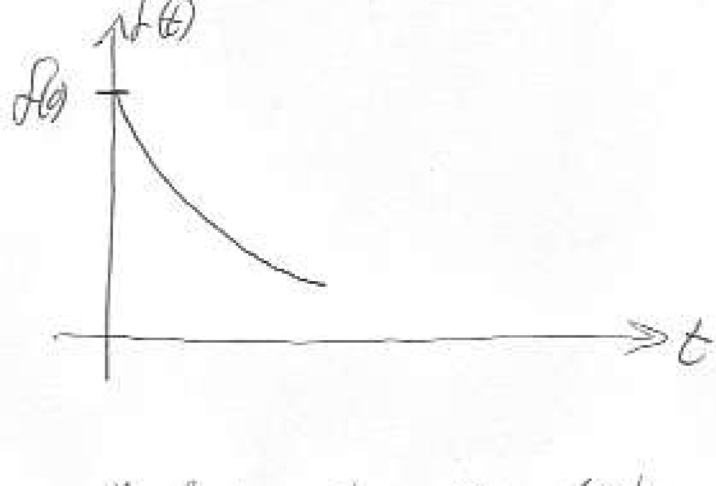


Schaubild für $k<0$:



Bsp. Wachstum: Auf Eurem Joghurt sitzen 50 Mikroorganismen. Während Ihr 2 h am Telefon plaudert werden daraus 150 MO. Bestimme die W.gl., wenn allg. W. zugrunde liegt.

$f(0) = 50$; $f(2) = 150 \Rightarrow 150 = 50 \cdot e^{k \cdot 2} \quad | :50$

$\Rightarrow 3 = e^{k \cdot 2} \quad | \ln$

$\Rightarrow \ln 3 = k \cdot 2 \cdot \ln e$, da $\ln e = 1$

$\Rightarrow \frac{\ln 3}{2} = k = \ln 3^{\frac{1}{2}} = \ln \sqrt{3}$

$$\Rightarrow \underline{f(t) = 50 \cdot e^{\ln\sqrt{3} \cdot t}}$$

<u>weitere Frage:</u> Ab welchem Zeitpunkt ist das Wachstum der MO größer als 50/h ?

Diese Art von Fragestellungen sind recht beliebt, da Sie das Verständnis für Wachstumsprozesse vermehrt fordern. In der Frage oben sehen wir keine Absolutgröße, sondern 50 MO/h stellt die Wachstumsgeschwindigkeit bzw. die Änderungsrate dar.
Die Funktion, die die Wachstumsgeschwindigkeit angibt, ist immer $\underline{f'(t)}$. Also wann ist $f'(t) > 50$

$$\Rightarrow f'(t) = 50 \cdot \ln\sqrt{3} \cdot e^{\ln\sqrt{3} \cdot t}$$

$$50 \cdot \ln\sqrt{3} \cdot e^{\ln\sqrt{3} \cdot t} > 50 \quad \Big| : (50 \cdot \ln\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow e^{\ln\sqrt{3} \cdot t} > \frac{1}{\ln\sqrt{3}} \quad \Big| \ln$$

$$\Rightarrow \ln\sqrt{3} \cdot t > \ln \frac{1}{\ln\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \quad t > \frac{\ln \frac{1}{\ln\sqrt{3}}}{\ln\sqrt{3}} \Rightarrow t > 1{,}0906$$

Also nach 1,1h ist die Wachstumsgeschw. bereits größer als 50MO/h.

b) beschränktes Wachstum + Diff.gl.

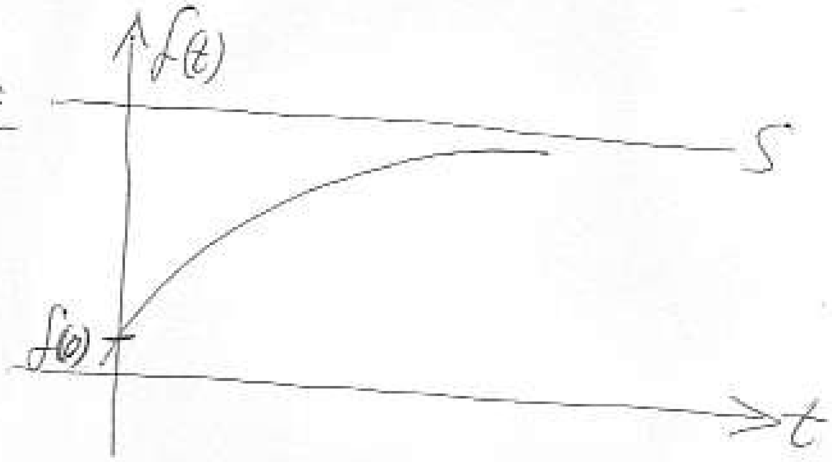
Soll das Modell des beschränkten Wachstums zugrunde gelegt werden, findet man im Aufgabentext eine Schranke vor. Oder auch eine Proportionalitätsbeschreibung, die es in sich hat und die ich unter **der** Beschreibung der Diff.gl. mit rein nehme.

<u>Allg. Gleichung:</u> $f(t) = S - c \cdot e^{-k \cdot t}$, wobei $c = S - f(0)$

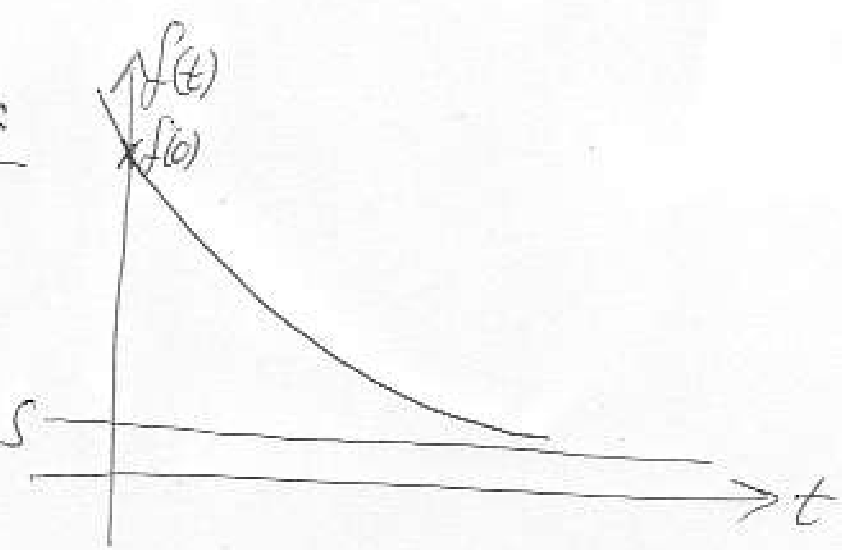
<u>Spezialfall:</u> Ist $f(0) = 0$, dann ist $c = S$

$\Rightarrow$ also $f(t) = S - S \cdot e^{-k \cdot t}$

<u>Schaubild für Wachstum:</u>



<u>Schaubild für Zerfall:</u>



Differentialgleichung d. beschr. Wachstums

Sieht allgemein so aus: $f'(t) = k \cdot (S - f(t))$.

Zum Vergleich, für weitere Erklärungen, die 1. Abl. der Funktion:

$$f'(t) = c \cdot k \cdot e^{-k \cdot t}$$

Was ist nun eine „Differentialgleichung“ ??

Ob als 1. Ableitung, oder $f'(t)$ in der Diffgl., beide f' haben die gleiche Bedeutung. Es ist die Änderungsrate oder Wachstumsgeschwindigkeit des Wachstumsprozesses. Der Unterschied liegt in der Form der Darstellung:

Möchte ich die 1. Abl. des Wachstumsprozesses bilden, muß mir ja die Funktion, nach der das Ganze wächst, bekannt sein. Damit ich eben meine Gesetze anwenden kann.

Bei einer Diff.gl. weiß ich grundsätzlich noch nichts über die Funktion selbst. Sie steht sozusagen als Unbekannte oder Variable $f(t)$ in der Diff.gl. Erst ~~man~~ durch die Überlegung, daß $f(t)$ eine Funktion sein sollte, deren 1. Abl. fast identisch mit $f(t)$ sein sollte, damit man wenig Probleme mit der Gleichung bekommt, ~~[illegible]~~ kommt man zu dem Schluß, daß die e-Funktion ideal passt. Die e-Funktion stellt also die Lösungsfunktion einer Differentialgleichung da.

In der Universitätsmathematik sind Differentialgleichungen und Ihre Lösungsfunktionen bzw. Ansätze ein eignes Kapitel.

<u>Bsp.:</u> Ihr werdet ins Krankenhaus eingeliefert. Über eine Tropfen-Infusion wird Euch ein Medikament mit 4 mg/h verabreicht. Gleichzeitig scheidet aber Eure Leber wieder 5% des vorhandenen Medikaments aus.
Stelle Diff.gl. und Wachstumsgl. auf.

<u>Diffgl.:</u> In der Aufgabe findet Ihr nur Angaben zur Änderungsrate bzw. Wachstumsgeschwindigkeit:

$$m'(t) = \underline{4} - \underline{0{,}05} \cdot m(t) \qquad \text{o.k.?}$$

jetzt stellt man Vergleich mit allg. Diff.gl. her:

$$f'(t) = k \cdot (S - f(t)) = \underline{k \cdot S} - \underline{k} \cdot f(t)$$

$$\Rightarrow k = 0{,}05 \text{ und } k \cdot S = 4$$

$$\Rightarrow 0{,}05 \cdot S = 4 \Rightarrow S = \frac{4}{0{,}05} = 80$$

da ja $m(0) = 0 \Rightarrow \boxed{m(t) = 80 - 80 \cdot e^{-0{,}05 \cdot t}}$

Die Obergrenze des Medikaments in Eurem Körper liegt also bei 80 mg.

Woher soll man wissen, wann man diese Differentialgl. des beschränkten Wachstums zu nehmen hat?

Dies wird Euch häufig durch eine „Proportionalitätserklärung" gesagt, die aber leider nicht jeder versteht. Nehmen wir das Abitur 2005, Wahlteil 3.2., Baden-Württemberg als Beispiel. Dort heisst es: „In einem Modell soll angenommen werden, daß die Änderungsrate des Fischbestandes proportional zur Anzahl der noch Platz findenden Fische ist." Klaro? O.K. wir übersetzen den Satz in eine Gleichung:

Änderungsrate $\hat{=}$ $f'(t)$

Anzahl der noch Platz findenden Fische $\hat{=}$ $S - f(t)$

[$f(t)$ sind die schon vorhandenen Fische].

$\Rightarrow$ also $\dfrac{f'(t)}{S - f(t)} = K$ (Proportionalitätsbedingung)

$\Rightarrow$ $\boxed{f'(t) = K \cdot (S - f(t))}$, siehe da, die Diffgl. d. beschr. W.