DAS MATHE - ZK - BUCH

Alle Originalaufgaben Haupttermine Gruppe A und B
von 1997 – 2008

Ausführlich gerechnete und kommentierte Lösungswege der Jahre 1998-2008
(1998-2000 nur Gruppe A)

Zusätzliche Hilfen zur Potenzrechnung, Logarithmen, Exponentialgleichungen, Wachstum, Körperberechnung

$\sqrt{\ }$ X^2 π Σ

Von: Jochen Koppenhöfer und Pascal Christian

Inhaltsverzeichnis

Vorwort und allgemeine Infos

Die zentrale Klassenarbeit im Fach Mathematik müssen alle SchülerInnen der 10.Klasse am allgemeinbildenden Gymnasium in Baden-Württemberg schreiben.
Der Termin und die Aufgaben werden vom Kultusministerium Baden-Württemberg vorgegeben.
Dieses Buch enthält alle Originalaufgaben der Haupttermine 1997-2007, sowie ausführlich gerechnete und kommentierte Lösungen zu den Jahren 1998-2007.
Als Zusatzmaterial habe ich einige Grundlagen zum Rechnen mit Potenzen, Logarithmen, Wachstumsaufgaben und Körpern beigefügt.

Du bekommst Aufgaben aus allen 4 wichtigen Gebieten der Mathematik der 10.Jahrgangsstufe Gymnasium. Je eine aus dem Gebiet der:

Potenzen/Logarithmen/Funktionen
Körperberechnung (einschließlich Kreis)
Wachstum
Wahrscheinlichkeit

Zur Bearbeitung der Aufgaben bekommst Du 90 Minuten Zeit. Einige Taschenrechner-Modelle und Formelsammlungen sind als Hilfsmittel erlaubt.
Euer Lehrer erhält 2 Versionen, Gruppe A und Gruppe B, der zentralen Klassenarbeit, die sich allerdings nur geringfügig unterscheiden. Je nach Gruppe liegt der Schwerpunkt entweder auf dem Bereich des Wachstums, der Wahrscheinlichkeit oder der Körperberechnung. D.h. die entsprechende Aufgabe ist um einen zusätzlichen Teil erweitert.
In den Lösungswegen findet Ihr diesen Zusatz als „Zusatz-Teilaufgabe Gruppe A bzw. B" hervorgehoben.
Natürlich ist die Qualität des Inhalts und das korrekte Rechnen das Hauptkriterium für eine gute Note. Die äußere Form und sprachliche Darstellung sind aber deswegen nicht zu vernachlässigen, da sie Einfluss auf die Note haben.
Der Notenspiegel bei Prüfungen wird so angesetzt, dass die Hälfte aller erreichbaren Punkte die Note 4 ergibt.

Tipp zum Einsatz dieses Buches: Rechne zuerst 1 ZK zusammen mit den Lösungswegen durch. Mach Dir klar, welche Regeln und Formeln diesen Lösungen zugrunde liegen.
Rechne danach dann alle ZK's zuerst ohne Hilfe der Lösungswege und kontrolliere anschließend. Rechne **nicht** alle an einem Tag. Verteile die Aufgaben auf 1-2 Wochen.
Du wirst sehen, dass es Dir von ZK zu ZK leichter fällt und Du innerhalb der einzelnen Aufgaben weiter kommst.

Und natürlich am Morgen der Mathe-ZK gut frühstücken und etwas Traubenzucker, sowie Wasser mit in die Prüfung nehmen.

Viel Erfolg und gutes Gelingen wünschen Euch

Jochen Koppenhöfer und Pascal Christian

Originalprüfung Haupttermin Mathematik ZK Baden-Württemberg 2007 Gruppe A und B

1.Aufgabe (8Punkte)

a) Vereinfache so weit wie möglich $\dfrac{5^{n+2}+2\bullet 5^{n}}{2\bullet 5^{n}-5^{n+1}}$

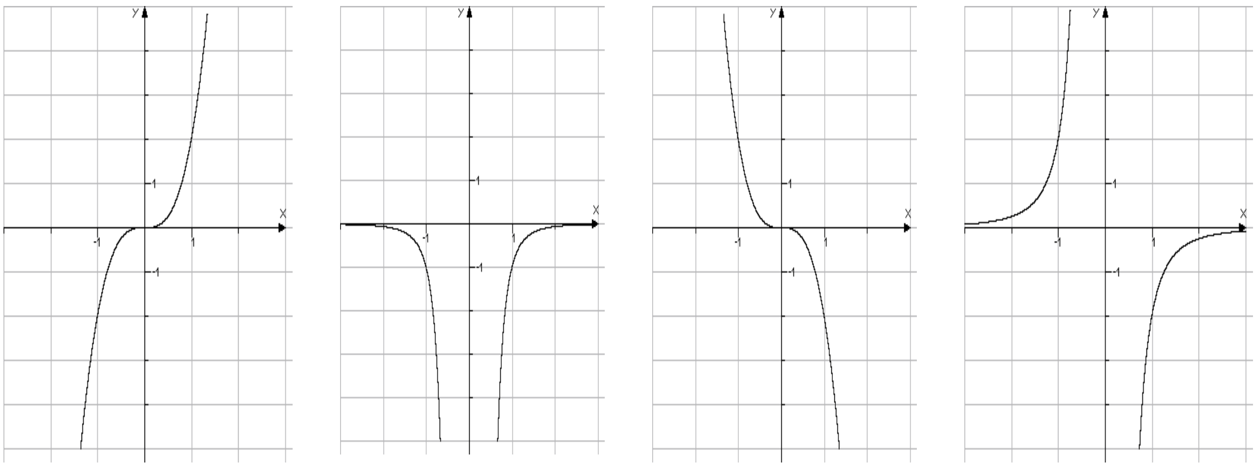
b) Löse die Gleichung $7^{x-3}-49^{x}=0$

c) Die 4 Bilder zeigen Schaubilder von Potenzfunktionen.
Ordne die Funktionen mit den Gleichungen

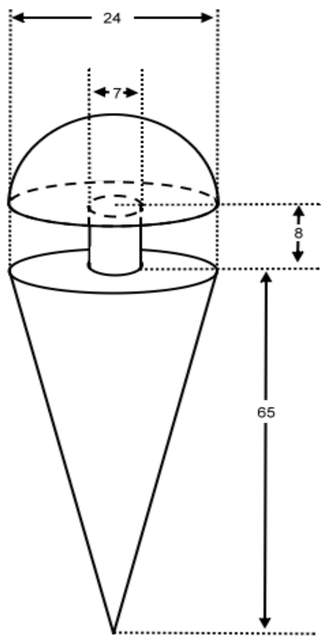
(1) $f(x)=-x^{-4}$ (2) $g(x)=2x^{3}$

jeweils einem Schaubild zu.
Gib für die übrigen Schaubilder jeweils einen möglichen Funktionsterm an.

(I) (II) (III) (IV)



2.Aufgabe (8Punkte)



Der abgebildete Flaschenverschluss ist zusammengesetzt aus einem Kreiskegel, einem Kreiszylinder und einer Halbkugel (siehe Abbildung; Maße in Millimeter).

a) Der Flaschenverschluss ist aus Stahl hergestellt.
Berechne das Gewicht des Flaschenverschlusses, wenn $1cm^{3}$ Stahl 7,9 g wiegt.

b) Wie tief steckt der Verschluss in einem Flaschenhals mit dem Innendurchmesser 18mm?
Welchen Flächeninhalt hat der Teil des Kegelmantels, der sich dann innerhalb der Flasche befindet?

3.Aufgabe (A:8Punkte/B:12Punkte)

Ein Würfel wurde so präpariert, dass die Augenzahl 1 mit der Wahrscheinlichkeit 0,3 und die Augenzahl 6 mit der Wahrscheinlichkeit 0,1 auftritt.
Die Augenzahlen 2,3,4 und 5 treten jeweils mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auf.

a) Der Würfel wird einmal geworfen.
Gib die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Augenzahlen an.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine gerade Augenzahl zu erhalten?

b) Nun wird der Würfel dreimal geworfen.
Berechne die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:

A: Man erhält nur Sechsen.

B: Man erhält immer die gleiche Augenzahl.

C: Man erhält genau eine Sechs.

c) Zusatz-Teilaufgabe der Gruppe B

Bei einer Serie von n Würfen soll mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% mindestens eine Eins auftreten. Wie groß muss n mindestens sein?

4.Aufgabe (A:12Punkte/B:8Punkte)

Zu Beginn des Jahres 1960 hatte die Stadt Rechenhausen 30000 Einwohner, zu Beginn des Jahres 2005 waren es 50500.
Zu Beginn des Jahres 1960 hatte die Stadt Lesewinkel 40000 Einwohner. Ihre Einwohnerzahl nahm seither infolge des Wegzugs der jungen Bevölkerung jährlich um 1% ab.

a) Um welchen Prozentsatz nahm die Einwohnerzahl von Rechenhausen jährlich zu, wenn man exponentielles Wachstum voraussetzt?
In welchem Jahr konnten die Rechenhausener den 40000-ten Einwohner feiern?

b) In welchem Jahr hatten beide Städte gleich viele Einwohner?

c) Zusatz-Teilaufgabe der Gruppe A

Im Rechenhausener Stadtteil „Weststadt" (1000 Einwohner) verbreitet sich derzeit ein Gerücht. Am Anfang kannten 2 Einwohner das Gerücht, eine Stunde später wussten bereits 2 weitere Einwohner davon. Man kann bei diesem Vorgang von logistischem Wachstum der Form

$$B(t+1) = B(t) + k \bullet B(t) \bullet \left(S - B(t)\right)$$

ausgehen.
Wie viele Einwohner kannten das Gerücht demnach nach 3 Stunden?
In der wievielten Stunde lag der stündliche Zuwachs erstmals über 15 Personen?

ZK Haupttermin 2007 Lösung

Aufgabe 1

a)

$$\frac{5^{n+2}+2\bullet 5^{n}}{2\bullet 5^{n}-5^{n+1}}=\frac{5^{n}(5^{2}+2)}{5^{n}(2-5^{1})}=\frac{27}{-3}=-9$$

b)

Hier verteilt man einfach die Terme auf beide Seiten des Gleichheitszeichens.
Wenn man jetzt noch erkennt, dass $49=7^{2}$ ist… perfekt:

$7^{x-3}-49^{x}=0\rightarrow 7^{x-3}=49^{x}\rightarrow 7^{x-3}=7^{2x}$ **jetzt 10er-log anwenden:**

$\log 7^{x-3}=\log 7^{2x}$ **mit Hilfe des 3.log. Gesetzes:** $(x-3)\log 7=2x\log 7$

$\rightarrow$ **log7 kann man kürzen: x-3=2x** $\rightarrow$ x=-3

c)

Funktion (1) kann man dem Schaubild (II) zuordnen, da

1. negative Hochzahl; deswegen Hyperbel als Schaubild.
2. gerade Hochzahl; deswegen ist Schaubild achsensymmetrisch zur y-Achse.
3. negativer Vorfaktor vor dem x-Term; deswegen liegt Schaubild unterhalb der x-Achse.

Funktion (2) kann man dem Schaubild (I) zuordnen, da

1. positive Hochzahl; deswegen ganzrationales Schaubild („parabelförmig“ ohne Definitionslücken).
2. ungerade Hochzahl; deswegen punktsymmetrisch zum Ursprung.
3. positiver Vorfaktor; deswegen negative Funktionswerte auf negativem Teil der x-Achse
4. und positive Funktionswerte auf positivem Teil der x-Achse.

Mögliche Funktionsterme für (III) und (IV):

Für (III): $h(x)=-2x^{3}$ **Für (IV):** $k(x)=-2x^{-3}$

Aufgabe 2
a)

Über das Volumen erhält man das Gewicht. Man errechnet eben nacheinander die einzelnen Volumina und addiert sie anschließend. Aus der Abbildung entnimmt man die Maße:

$$V_{Kreiskegel} = \frac{1}{3}\pi r^2 h \rightarrow \frac{1}{3}\pi \bullet (12mm)^2 \bullet 65mm = 3120\pi mm^3$$

$$V_{Kreiszylinder} = \pi \bullet r^2 \bullet h \rightarrow \pi \bullet (3{,}5mm)^2 \bullet 8mm = 98\pi mm^3$$

$$V_{Halbkugel} = \frac{1}{2} \bullet \frac{4}{3} \bullet \pi \bullet r^3 \rightarrow \frac{2}{3} \bullet \pi \bullet (12mm)^3 = 1152\pi mm^3$$

$$V_{Flaschenverschluss} = V_{Kreiskegel} + V_{Kreiszylinder} + V_{Halbkugel} = (3120\pi + 98\pi + 1152\pi)mm^3 = 13729\ mm^3$$

Der Umrechnungsfaktor von mm^3 in cm^3 beträgt 1000:1.

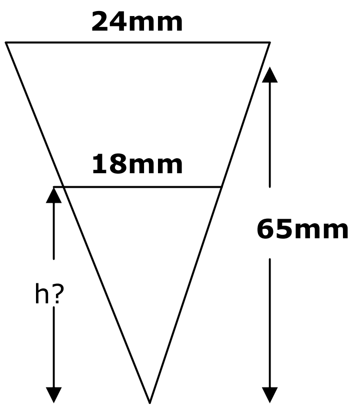
Also sind $13729mm^3 = 13{,}729cm^3$.

Gewicht des Verschlusses: $13{,}729cm^3 \bullet 7{,}9\frac{g}{cm^3}$ = 108,46 g.

b)
Mit anderen Worten: Wo hat der Kreiskegel einen Durchmesser von 18mm?

Diese Frage kann man sehr gut mit dem Strahlensatz beantworten.

Skizze des Kreiskegels dazu:

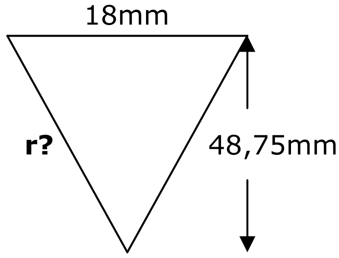


2. Strahlensatz: $\frac{18mm}{24mm} = \frac{h}{65mm} \rightarrow h = \frac{18}{24} \bullet 65mm \rightarrow h =$ **48,75mm** tief steckt der Verschluss im Flaschenhals.

Kegelmantel:

Rollt man einen Kegel ab, dann erhält man einen Kreisausschnitt.

Folgende Maße des kleinen Kegels sind bekannt:



Die Fläche des Kreisausschnitts kann man zu $A = \frac{1}{2} \bullet b \bullet r$ errechnen:

r: mit dem Satz des Pythagoras $r^2 = (48{,}75mm)^2 + (9mm)^2 \rightarrow$

$r = \sqrt{2457{,}56} \rightarrow r = 49{,}57mm$

b: b, der Kreisbogen, ist bei einem Kegel der Umfang des Grundkreises.

$b = U = 2 \bullet \pi \bullet 9mm = 56{,}55mm$

Damit folgt für die Fläche: $A = \frac{1}{2} \bullet 56{,}55mm \bullet 49{,}57mm =$ **1401,6** mm^2

Aufgabe 3
a)

Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten ergibt immer 1. Auf die Augenzahlen 2,3,4 und 5 entfällt die Summe von 1-(0,1+0,3)=0,6.
Teilt man dies durch 4, da es ja 4 Zahlen sind, erhält man p=0,15:

Tabelle der Wahrscheinlichkeitsverteilung:

X=Augenzahl	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
P(X)	**0,3**	**0,15**	**0,15**	**0,15**	**0,15**	**0,1**

Ereignis D: „Gerade AZ"; Ergebnismenge von D=(2;4;6)

P(D)= 0,15+0,15+0,1=**0,4**

b)
P(A)= $(0{,}1)^3 =$ **0,001**

P(B)= $(0{,}3)^3 + 4 \bullet (0{,}15)^3 + (0{,}1)^3 = 0{,}027 + 0{,}0135 + 0{,}001 =$ **0,0415**

P(C)= $0{,}1 \bullet 0{,}9^2 \bullet 3 =$ **0,243**

c) Zusatz-Teilaufgabe Gruppe B

Diese Art von Aufgaben sind sehr oft so konstruiert, dass man mit dem Gegenereignis rechnen sollte:

$(1-0{,}3)^n = 0{,}01 \rightarrow (0{,}7)^n = 0{,}01$ 10er-log anwenden: $\log(0{,}7)^n = \log 0{,}01 \rightarrow$

mit dem 3.log-Gesetz: $n \bullet \log 0{,}7 = \log 0{,}01 \rightarrow n = \dfrac{\log 0{,}01}{\log 0{,}7} =$ **12,91**

d.h. ab dem 13.Wurf tritt diese Wahrscheinlichkeit ein.

<u>Aufgabe 4</u>
a)

Das allgemein exponentielle Wachstum genügt folgender Funktion:

$$B(t) = B(0) \bullet a^t$$

Das Jahr 1960 wird als t=0 betrachtet $\rightarrow B(0) = 30000$ Einwohner.
Daraus folgt, dass $B(45) = 50500$ Einwohner.

Diese Angaben in die Wachstumsfunktion: $50500 = 30000 \bullet a^{45} \rightarrow a = \sqrt[45]{\frac{50500}{30000}} = 1{,}01164$

Aus den Nachkommastellen des Wachstumsfaktors lässt sich die prozentuale Zunahme ablesen:

Prozentuale jährliche Zunahme: 1,164%.

40000ster Einwohner?

$$40000 = 30000 \bullet 1{,}01164^t \rightarrow 1{,}01164^t = \frac{40000}{30000} \rightarrow 1{,}01164^t = \frac{4}{3} \rightarrow$$

mit 10er-log: $\log 1{,}01164^t = \frac{4}{3} \rightarrow t \bullet \log 1{,}01164 = \log\frac{4}{3} \rightarrow t = \frac{\log\frac{4}{3}}{\log 1{,}01164} =$ **24,86 Jahre.**

D.h. im Jahr 1960+25 Jahre=1985 konnten die Rechenhausener Ihren 40000sten Einwohner feiern.

b)
Einwohnerzahl von Rechenhausen: $B(t) = 30000 \bullet 1{,}01164^t$

Einwohnerzahl von Lesewinkel: $G(t) = 40000 \bullet 0{,}99^t$
(bei einer Abnahme bzw. Zerfall, wird von der Zahl 1 der entsprechende Bruchteil abgezogen.

Dies ergibt dann den Wachstumsfaktor a. Hier eben 0,99.).

Gleich viele Einwohner haben beide Städte dann, wenn B(t)=G(t):

$$30000 \bullet 1{,}01164^t = 40000 \bullet 0{,}99^t \rightarrow \left(\frac{1{,}01164}{0{,}99}\right)^t = \frac{40000}{30000} \rightarrow (1{,}02186)^t = \frac{4}{3} \rightarrow$$

mit dem 10er-log: $t \bullet \log 1{,}02186 = \log\frac{4}{3} \rightarrow t = \frac{\log\frac{4}{3}}{\log 1{,}02186} =$ **13,3 Jahre.**

Also im Jahr 1973-1974 hatten beide Städte gleich viel Einwohner.

c) Zusatz-Teilaufgabe Gruppe A

Das Gerücht verbreitet sich nach dem logistischen Wachstum:

$$B(t+1) = B(t) + k \bullet B(t) \bullet (S - B(t))$$

Die Einwohnerzahl des Stadtteils (1000) ist als Schranke S anzusehen.

B(0)=2   B(1)=4   sind in der Aufgabe angegeben.

Damit lässt sich k ermitteln:

$$4 = 2 + k \bullet 2 \bullet (1000 - 2) \rightarrow 2 = k \bullet 1996 \rightarrow k = \frac{2}{1996} = 0{,}001002$$

$$B(2) = 4 + 0{,}001002 \bullet 4 \bullet (1000 - 4) \rightarrow B(2) = 8$$

$$B(3) = 8 + 0{,}001002 \bullet 8 \bullet (1000 - 8) \rightarrow B(3) = 16$$

16 Einwohner kannten also das Gerücht nach 3 Stunden.

Wann lag der stündliche Zuwachs erstmals über 15 Personen?

$$B(4) = 16 + 0{,}001002 \bullet 16 \bullet (1000 - 16) \rightarrow B(4) = 31{,}77$$

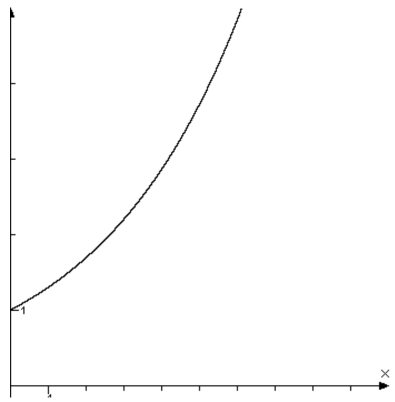
Von der 3. auf die 4. Stunde erhöht sich die Zahl der Wissenden von 16 auf über 31.
Damit liegt der stündliche Zuwachs in der 4.Stunde erstmals über 15 Personen.

Allgemeines zum Wachstum

Das Themengebiet Wachstum in der 10.Klasse umfasst 3 Wachstumsmodelle:

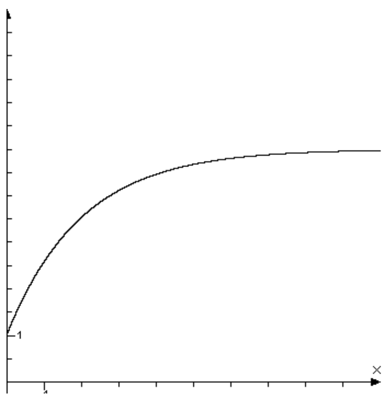
1) Das exponentielle Wachstum $B(t) = B(0) \bullet a^t$ $B(0) \cong$ Anfangsbestand
$a \cong$ Wachstumsfaktor

Schaubild:



2) Das beschränkte Wachstum $B(t+1) = B(t) + k \bullet \left(S - B(t)\right)$

Schaubild:

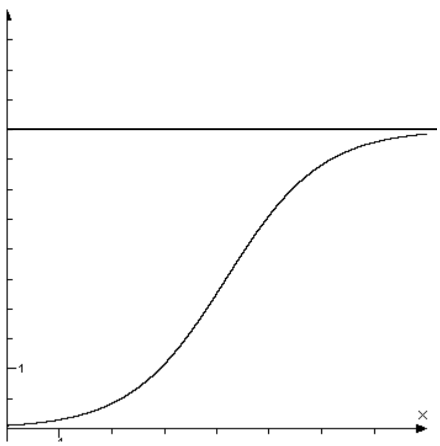


3) Das logistische Wachstum $B(t+1) = B(t) + k \bullet B(t) \bullet \left(S - B(t)\right)$

$k \cong$ **Wachstumskonstante;** $S \cong$ **Schranke/Grenze**

Schaubild:

S



Man sieht schon in der Art der Darstellung, dass es einen prinzipiellen Unterschied zwischen den Gleichungen 1) bzw. 2) und 3) geben muss.

Gleichung 1) wird auch „explizit" oder auch „geschlossen" genannt. Möchte man also den Bestand nach z.B. $t=10$ Jahren ausrechnen, dann setzt man $t=10$ in die Gleichung ein und kann, wenn $B(0)$ und a bekannt ist, mit nur einem Rechenschritt den Bestand $B(10)$ angeben.

Anders hingegen bei Gleichung 2) und 3). Beide sind „rekursiv" formuliert.
Möchte man hier den Bestand $B(10)$ ausrechnen und startet ebenfalls bei $B(0)$, dann kann man zuerst nur $B(1)$ errechnen. Mit $B(1)$ geht man dann in die Gleichung und rechnet $B(2)$. Mit $B(2)$ in die Gleichung und errechnet $B(3)$, u.s.w. Man hat also 10 Rechenschritte durchzuführen.

ZK-Anwendungen:

In den letzten Jahren hatte man im 1.Teil der ZK-Aufgabe ausschließlich mit der Gleichung des allgemeinen Wachstums zu rechnen und im 2.Teil mit der Gleichung des logistischen Wachstums.

Besondere Schwierigkeiten bei Wachstumsaufgaben:

1) **Exponentielles Wachstum:** der Wachstumsfaktor a wird nie direkt im Aufgabentext mit a=....... angegeben. Meist steht er als prozentuale Zunahme oder Abnahme im Text.

   Prozentuale Zunahme: Bsp.: Ein Wachstumsprozess vermehrt sich um 12% pro Zeiteinheit. 12% schreibt man dann in die Dezimalform um (:100, also 0,12) und addiert dies dann zu 1. Das ergibt für $a=1{,}12$.

   Prozentuale Abnahme: Ein Wachstumsprozess muss nicht immer zunehmend sein. Abnehmendes Wachstum ist ein Zerfall.
   Bsp.: Ein Wachstumsprozess nimmt um 12% pro Zeiteinheit ab. 12% schreibt man wieder als Dezimalzahl (0,12) und subtrahiert sie jetzt von 1. Das ergibt für $a=0{,}88$.

   Etwas schwieriger:

   Vorsicht ist geboten, wenn sich die prozentuale Zunahme oder Abnahme nicht auf eine Zeiteinheit bezieht, sondern auf mehrere Zeiteinheiten.

   Bsp. ZK 2006 Aufgabe 4:

   „In einer Fischzucht werden Lachse aufgezogen.

   Zu Beginn der Beobachtung betrug das Gesamtgewicht der vorhandenen Lachse 45 000kg.
   Ohne Abfischen würde sich dieses Gewicht alle 6 Monate verdoppeln.
   Stelle ein mögliches Wachstumsgesetz auf."

   Verdoppelung heißt also 100%. Hier in 6 Monaten.

Lösung:

allg. Wachstum: $B(t) = B(0) \bullet a^t$

Wachstumsfaktor a wird nun folgendermaßen bestimmt:
Das Gewicht verdoppelt sich ja alle 6 Monate:

Also gilt $2 \bullet B(0) = B(0) \bullet a^6 \rightarrow 2 = a^6 \rightarrow a = \sqrt[6]{2} \rightarrow a = 1{,}1225$

Mögliches Wachstumsgesetz also: $B(t) = 45000 \bullet 1{,}1225^t$

Warum „mögliches Wachstumsgesetz"? Es geht auch anders:
Wenn man für a=2 verwendet, also $B(t) = 45000 \bullet 2^t$*, dann ist eben die Hochzahl t nicht mehr in Monaten definiert. t=1 bedeutet dann in dieser Gleichung 6 Monate.*

Es gibt also 2 Möglichkeiten. Dieses Beispiel zeigt, dass also a und die Definition seiner Hochzahl t immer im Zusammenhang zu betrachten sind.

2) **beschränktes und logistisches Wachstum:**

Diese Aufgaben laufen sehr oft darauf hinaus, dass man 2 Werte bekommt, z.B. B(1) und B(2). Daraus kann man dann einfach die Wachstumskonstante k durch einfaches Einsetzen ermitteln. Nach k wird meist nie direkt gefragt. Ohne kann man aber nicht Weiterrechnen…

Bsp.: Aufgabe 4 ZK 2007 c)-Teil

Im Rechenhausener Stadtteil „Weststadt" (1000 Einwohner) verbreitet sich derzeit ein Gerücht. Am Anfang kannten 2 Einwohner das Gerücht, eine Stunde später wussten bereits 2 weitere Einwohner davon. Man kann bei diesem Vorgang von logistischem Wachstum der Form

$$B(t+1) = B(t) + k \bullet B(t) \bullet \left(S - B(t)\right)$$

ausgehen.
Wie viele Einwohner kannten das Gerücht demnach nach 3 Stunden?

Lösung:
Das Gerücht verbreitet sich nach dem logistischen Wachstum:

$$B(t+1) = B(t) + k \bullet B(t) \bullet (S - B(t))$$

Die Einwohnerzahl des Stadtteils (1000) ist als Schranke S anzusehen.

B(0)=2 B(1)=4 sind in der Aufgabe angegeben.

Damit lässt sich k ermitteln:

$$4 = 2 + k \bullet 2 \bullet (1000 - 2) \rightarrow 2 = k \bullet 1996 \rightarrow k = \frac{2}{1996} = 0{,}001002$$

$$B(2) = 4 + 0{,}001002 \bullet 4 \bullet (1000 - 4) \rightarrow B(2) = 8$$

$$B(3) = 8 + 0{,}001002 \bullet 8 \bullet (1000 - 8) \rightarrow B(3) = 16$$

16 Einwohner kannten also das Gerücht nach 3 Stunden.
Um die Frage beantworten zu können, musste man also zuerst k ermitteln.

Selten gestellt, aber umso schwieriger ist folgende Aufgabe, die eine Termumformung verlangt. Diese Aufgaben verlieren ihren anscheinenden Schweregrad, wenn man sich klar macht, dass die Umformung immer gleich abläuft.

Bsp.: Aufgabe 4 ZK 2005 c)-Teil

Ab dem Jahr 2007 soll erstmals Walfang in geringem Ausmaß erlaubt werden, so dass sich der Walbestand nach dem Gesetz

$$W(t+1) = W(t) + 0{,}000015 \bullet W(t) \bullet \left(10000 - W(t)\right) - 0{,}03 \bullet W(t)$$

entwickeln würde.
Welcher Anteil der Wale dürfte demnach jährlich gefangen werden?
Zeige, dass immer noch logistisches Wachstum vorliegt, nun aber mit einem langfristigen Bestand von 8000 Walen.

Lösung:

Die Form der Gleichung stellt ein logistisches Wachstum dar. Nur eben am Schluss um die jährliche Fangquote ergänzt $\left(-0{,}03 \bullet W(t)\right)$.

W(t) stellt also den Walbestand dar und davon dürfen ab 2007 $0{,}03 = \frac{3}{100}$ *bzw.* ***3%*** *gefangen werden.*

<u>Log. Wachstum, aber mit Langfristbestand von 8000 Walen:</u>

Die Gleichung muss auf eine übliche Form für log. Wachstum zurückgeführt werden:

$W(t+1) = W(t) + 0{,}000015 \bullet W(t) \bullet (10000 - W(t)) - 0{,}03 \bullet W(t)$ *Ausmultiplizieren:*

$\rightarrow W(t+1) = W(t) + 0{,}15 \bullet W(t) - 0{,}000015 \bullet W^2(t) - 0{,}03 \bullet W(t)$ *Zusammenfassen:*

$\rightarrow W(t+1) = 1{,}12 \bullet W(t) - 0{,}000015 \bullet W^2(t)$

Anpassung auf übliche Form:

$W(t+1) = W(t) + 0{,}12 \bullet W(t) - 0{,}000015 \bullet W^2(t)$ *W(t) ausklammern:*

$W(t+1) = W(t) + W(t) \bullet (0{,}12 - 0{,}000015 \bullet W(t))$ *0,000015 ausklammern:*

$W(t+1) = W(t) + 0{,}000015 \bullet W(t) \bullet (8000 - W(t))$

Und fertig. Die Gleichung hat jetzt die Euch bekannte Form einer log. Wachstumsgleichung.
Unter dem langfristigen Bestand ist die obere Schranke zu verstehen, die nicht überschritten wird. Wie man leicht erkennen kann, sind dies 8000 Wale.

Wer noch nie eine solche Umformung gemacht hat, wird dies sicherlich als sehr schwer empfinden.

Tipp: *Zuerst alles Ausmultiplizieren, Zusammenfassen und dann durch Ausklammern auf die gesuchte Form bringen.*